Correction DM 4

Q1. * PFD appliqué à P dans $\mathcal{R}_T$ galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

à l'instant initial $\vec{v} = v_0\vec{u_y}$ donc $\vec{F}_{mag}(t=0) = qvB\,\vec{u_x}$
donc $\frac{d\vec{v}}{dt}(t=0)$ est suivant $\vec{u_x}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}$ reste dans le plan (Oxy). Ultérieurement $\vec{F}_{mag}$ est selon $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ (car $\vec{v}$ a une composante suivant $\vec{u_x}$)
donc $\vec{v}$ reste contenu dans (Oxy) $\Rightarrow$ mouvement plan.

* D'après le TPC appliqué à P dans $\mathcal{R}_T$:

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{mag}) = (q\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow E_c = cte$$

donc $v = cte$

Q2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P est soumise à la force magnétique : $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$

On projette dans la base cartésienne et on calcule le produit vectoriel $q\vec{v}\times\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\dot{y}B \\ -q\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} q\dot{x} & & 0 \\ q\dot{y} & & 0 \end{matrix}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}$

Soit
$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Q2. $\ddot{z} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = cte = \dot{z}(0) = 0$ car $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_y}$

et $z = cte = 0$ car à $t=0$ la particule est à l'origine du repère donc le mouvement est contenu dans le plan (xOy).

les 2 autres équations sont couplées

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$$

On intègre la 1ère équation : $\dot{x} = \omega y + cte$

Or $\dot{x}(0) = 0$ et $y(0) = 0$

On a donc $0 = \omega \times 0 + cte \Rightarrow cte = 0$

Soit $\dot{x} = \omega y$ que l'on réinjecte dans la 2ème équation :

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

c'est l'équation de l'O.H, dont la solution est $y = A\cos(\omega t) + B\sin \omega t$

avec A et B 2 constantes que l'on détermine avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0$

$$\begin{cases} 0 = A\cos 0 + B\sin 0 \\ v_0 = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

Soit $y = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Et on détermine x avec l'équation $\ddot{y} = -\omega \dot{x}$

$-v_0 \omega \sin \omega t = -\omega \dot{x}$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 \sin(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + C$

avec C = constante or $x(0) = 0$ donc

$0 = -\frac{v_0}{\omega} \cos 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{v_0}{\omega}$

$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$

les équations horaires sont donc :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient l'équation de la trajectoire en combinant $x(t)$ et $y(t)$:

$$\boxed{\left(x(t) - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2(t) = \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega\left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$ et de rayon

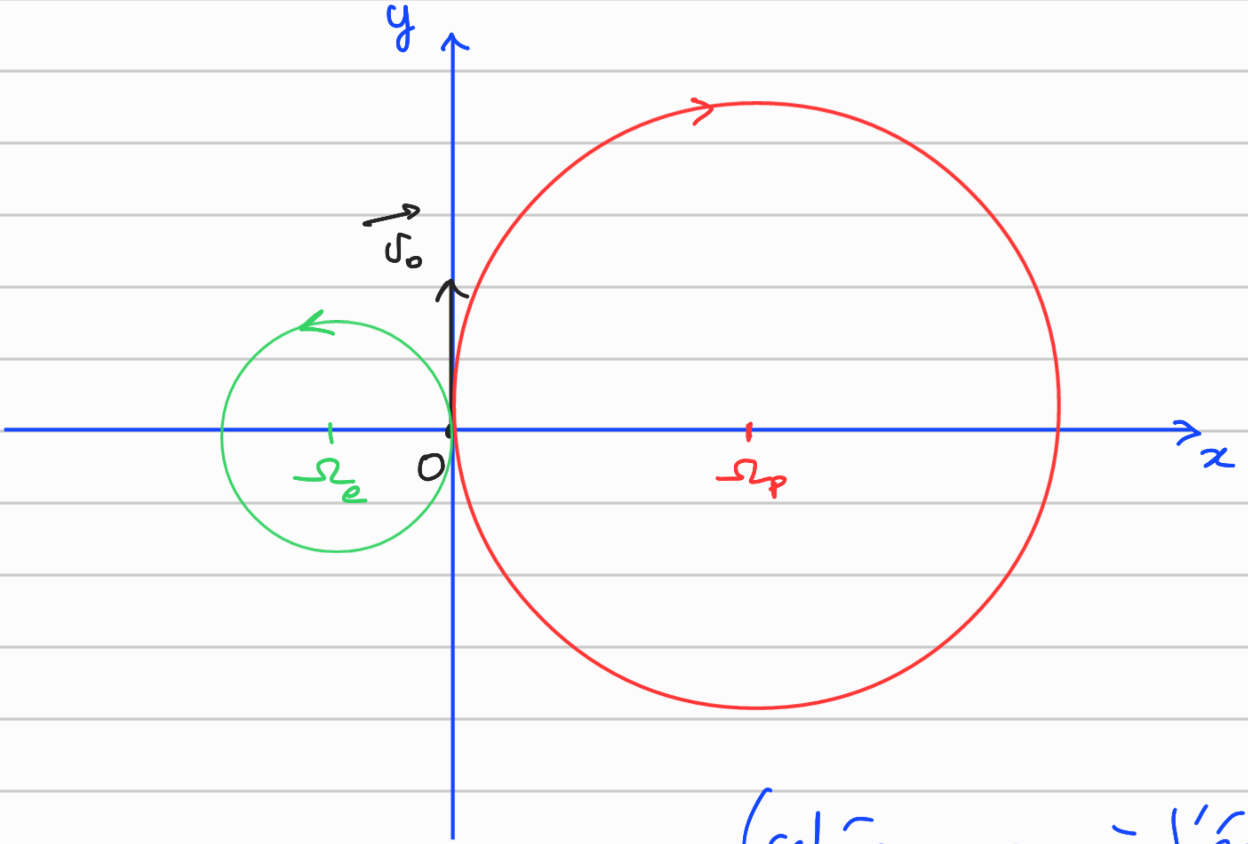
$$\boxed{R = \left|\frac{v_0}{\omega}\right| = \frac{m v_0}{|q| B}}$$

* Pour un proton $x(\Omega_p) = \frac{m_p . v_0}{eB}$ et $R_p = \frac{m_p v_0}{eB}$

  le centre du cercle est à droite de l'origine
  $\Rightarrow$ cercle parcouru dans le sens horaire

* Pour un électron $x(\Omega_e) = -\frac{m_e v_0}{eB}$ et $R_e = \frac{m_e v_0}{eB}$

  le centre du cercle est à gauche de l'origine $\Rightarrow$ cercle parcouru dans le sens anti-horaire, et beaucoup plus petit car $\frac{R_e}{R_p} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{2000}$



(schéma pas à l'échelle)

Q3. En présence de frottement le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} - \lambda \vec{v}$$

Soit $\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} - \lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} \end{cases}$

La 3ème équation donne $\ddot{z} + \alpha\dot{z} = 0$

Soit $\dot{z} = Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{1}{\alpha}$

et $A = cte$ que l'on détermine avec la vitesse initiale : $\dot{z}(0) = 0$ car $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_y}$.

Donc $\dot{z} = 0 \Rightarrow z = cte = 0$

le mouvement est plan, il est contenu dans le plan (xOy).

Q4. On pose $u = x + iy$

En combinant les 2 premières équations, il vient :

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x} - i\omega\dot{x} - i\alpha\dot{y}$$

$$\ddot{u} = -(\alpha + i\omega)(\dot{x} + i\dot{y})$$
$$\ddot{u} = -(\alpha + i\omega)\dot{u}$$

$$\ddot{u} + (\alpha + i\omega)\, \dot{u} = 0$$

On a donc $\dot{u} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{1}{\alpha + i\omega}$

$$\dot{u}(t) = A e^{-(\alpha+i\omega)t}$$

or $\dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0)$
$= v_0 i$

$v_0 i = A e^{0} \Rightarrow A = v_0 i$

$$\dot{u}(t) = v_0 i e^{-(\alpha+i\omega)t}$$

$$u(t) = \frac{-v_0 i}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} + B$$

avec B = constante que l'on détermine
avec $u(0)$: $u(0) = x(0) + iy(0) = 0$.

$$0 = -\frac{v_0 i}{\alpha + i\omega} + B \Rightarrow B = \frac{v_0 i}{\alpha + i\omega}$$

$$u(t) = \frac{-v_0 i}{\alpha + i\omega} e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right) + \frac{v_0 i}{\alpha + i\omega}$$

$$u(t) = \frac{-(v_0 i)(\alpha - i\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}\left(\cos\omega t - i\sin(\omega t)\right)e^{-\alpha t} + \frac{v_0 i(\alpha - i\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$u(t) = \frac{-v_0\omega - i\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)e^{-\alpha t} + \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} + i\frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$u(t) = \frac{v_0 \omega}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right) - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t}$$

$$+ i\left[\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\right)\right]$$

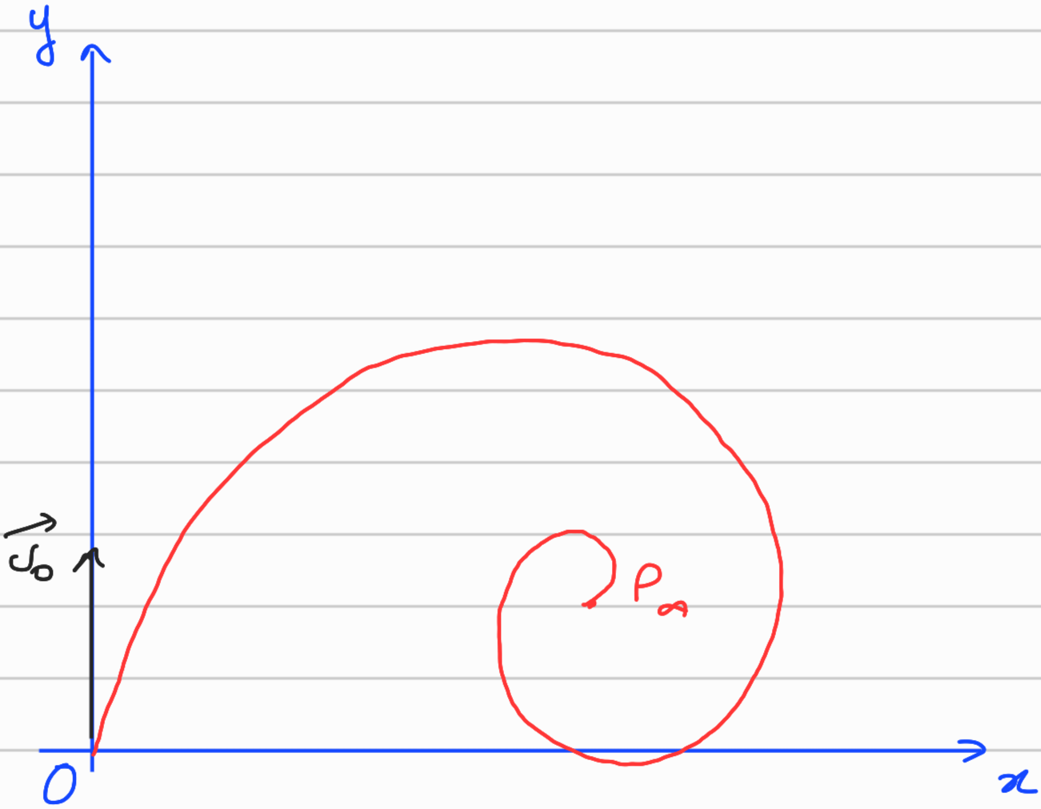
D'où $x(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right) - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t}$

$$y(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right)$$

Q5. Pour $t \to +\infty$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} x(t) \to \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2} \\ &\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{d'où } P_\infty\left(\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2} ; \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2} ; 0\right)$$

La particule continue à tourner (présence des termes sinusoïdaux) mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale tournant toujours vers la droite pour un proton, elle s'enroule autour du point P_∞ :



y
$\vec{v_0}$
P_∞
O
x