Devoir surveillé n° 7

Durée : 3 heures

Préambule : Exemple d'en-tête de concours

« La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est recommandé de lire le texte en entier.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. »

Plan :

Ce devoir se compose de 3 exercices indépendants :

— L'exercice 1 porte sur différents aspects de la chimie de l'élément mercure.

— L'exercice 2 s'intéresse à une bille qui tourne dans un cône.

— L'exercice 3 s'intéresse à un satellite en orbite autour de la Terre.

Exercice 1 : Chimie autour du mercure ($\sim$ 33%)

Les deux parties sont indépendantes.

Données pour la partie I :

— Le mercure liquide $Hg_{(\ell)}$ est seul dans sa phase ; son activité est égale à 1, comme pour les solides.

— La température est égale à 298 K.

— Potentiels standards à 298 K : $E_1^\circ(Hg^{2+}_{(aq)}/Hg^{2+}_{2\,(aq)}) = 0{,}91\,\mathrm{V}$

$E_2^\circ(O_{2\,(g)}/H_2O_{(\ell)}) = 1{,}23\,\mathrm{V}$

$E_3^\circ(Hg^{2+}_{2\,(aq)}/Hg_{(\ell)}) = 0{,}80\,\mathrm{V}$

— Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$

Partie I. Le mercure et ses ions en solution aqueuse

Q1. L'ion mercureux existe en solution aqueuse acide sous la forme d'un ion condensé dimère de formule Hg_2^{2+}. Écrire la demi-équation électronique associée au couple $Hg^{2+}_{(aq)}/Hg^{2+}_{2\,(aq)}$.

Q2. L'ion mercureux $Hg^{2+}_{2\,(aq)}$ est oxydé en solution aqueuse acide en ion mercurique $Hg^{2+}_{(aq)}$ par le dioxygène O_2 atmosphérique qui se dissous dans l'eau.

(a) Écrire avec la formule de Nernst les potentiels E_1 et E_2 des deux couples concernés.

(b) Tracer un diagramme de prédominance pour pH = 0 , sur lequel figurent les espèces des deux couples concernés. Pour calculer les potentiels aux frontières, on prendra les concentrations en $Hg^{2+}_{(aq)}$ et $Hg^{2+}_{2\,(aq)}$ égales à $1\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$, et la concentration en O_2 égale à 1 bar. Justifier la réaction décrite ci-dessus entre l'ion mercureux Hg_2^{2+} et le dioxygène O_2.

(c) Écrire l'équation de la réaction entre l'ion mercureux Hg_2^{2+} et le dioxygène O_2. Peut-on considérer que cette réaction est totale ? Le justifier en donnant sans démonstration, l'expression de sa constante d'équilibre et sa valeur numérique.

Q3. Afin de conserver une solution acide d'ions mercureux Hg_2^{2+}, on introduit quelques gouttes de mercure Hg liquide. Les ions Hg_2^{2+} sont ainsi régénérés au fur et à mesure de leur oxydation par le dioxygène atmosphérique.

(a) Quelle réaction peut se produire entre l'ion mercurique Hg^{2+} et le mercure Hg introduit ? Justifier qualitativement la réponse à l'aide d'un diagramme de prédominance faisant intervenir les deux couples concernés. Pour calculer les potentiels aux frontières, on prendra les concentrations en $Hg^{2+}_{(aq)}$ et $Hg^{2+}_{2\,(aq)}$ égales à $1\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$. Comment s'appelle une telle réaction ?

(b) Établir (= démontrer) la constante d'équilibre de la réaction entre l'ion mercurique Hg^{2+} et le mercure Hg, rapportée à 1 Hg^{2+}, puis vérifier que sa valeur vaut 68. Cette réaction peut-elle être considérée comme totale ?

Q4. Une solution S de concentration initiale $C = 0{,}1\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$ en ions mercureux Hg_2^{2+} a été partiellement oxydée par O_2 dissous. Elle contient maintenant $C' = 0{,}02\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$ d'ions Hg^{2+} et on considère qu'il ne reste plus de O_2 dissous.

(a) Quelle est la concentration en ions mercureux Hg_2^{2+} (notée C'') restant dans cette solution ?

(b) Afin de régénérer les ions mercureux Hg_2^{2+}, on ajoute sans variation de volume quelques gouttes de mercure liquide. Sachant qu'il reste du mercure liquide, déterminer la concentration en ions Hg^{2+} après cette addition.

(c) Quel est le pourcentage d'ions Hg^{2+} ainsi éliminés ?

Partie II. Pile au mercure

Données pour la partie II :

- Le mercure liquide $Hg_{(\ell)}$ est seul dans sa phase ; son activité est égale à 1, comme pour les solides.
- La température est égale à 298 K.
- Potentiels standards à 298 K : $E_4^\circ(Hg^{2+}_{(aq)}/Hg_{(\ell)}) = 0{,}85\,\text{V}$
  $E_5^\circ(Zn^{2+}_{(aq)}/Zn_{(s)}) = -0{,}76\,\text{V}$
- Produits de solubilité : $Hg(OH)_{2\,(s)}$: $K_{s1} = 2{,}36 \times 10^{-26}$
  $Zn(OH)_{2\,(s)}$: $K_{s2} = 7{,}08 \times 10^{-18}$
- Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$
- Masses molaires atomiques : Mercure : $M(\text{Hg}) = 200{,}6\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
  Oxygène : $M(\text{O}) = 16{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
  Hydrogène : $M(\text{H}) = 1{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Constante de Faraday = 1 F = $96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1} = \mathcal{N}_A \times e$

La pile au mercure peut se schématiser de façon simplifiée par :

$$\text{?} \quad Hg_{(\ell)} \mid Hg(OH)_{2\,(s)} \;\|\; Zn(OH)_{2\,(s)} \mid Zn_{(s)} \quad \text{?}$$

demi-pile ① demi-pile ②

La demi-pile ① contient du mercure liquide au contact d'hydroxyde mercurique $Hg(OH)_{2\,(s)}$ et d'un électrolyte (solution de soude concentrée : $Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$).
La demi-pile ② contient du zinc solide au contact d'hydroxyde de zinc $Zn(OH)_{2\,(s)}$ et de la même solution de soude concentrée.

Q5. Potentiels des deux demi-piles :

(a) Exprimer les potentiels des deux demi-piles : E_4 pour la demi-pile ① et E_5 pour la demi-pile ② en fonction des potentiels standards fournis, des produits de solubilité des hydroxydes, du produit ionique de l'eau et du pH.

(b) Faire les applications numériques pour donner les expressions de E_4 et E_5 en fonction du pH.

(c) En déduire la borne positive et la borne négative de cette pile. Déterminer la fem de cette pile. Cette fem dépend-elle de la concentration en électrolyte ?

Q6. Écrire les équations des réactions électrochimiques à chaque électrode, ainsi que l'équation-bilan de la réaction se produisant dans la pile faisant intervenir des espèces solides et le mercure liquide. Préciser, en justifiant où se trouve l'anode et où se trouve la cathode.

Q7. On souhaite que cette pile puisse délivrer, à 298 K, une intensité constante de 2 A pendant une heure avant d'être usée. Quelle masse minimale d'hydroxyde mercurique $Hg(OH)_{2(s)}$ doit-on utiliser ?

Exercice 2 : Une bille qui tourne dans un cône ($\sim$ 33%)

Une bille M de masse m, supposée ponctuelle, peut se déplacer sans frottements, sur un cône d'axe vertical (Oz) et de demi-angle au sommet α. On repère sa position en coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'angle θ étant défini par $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_r})$.

La particule M est abandonnée en un point M_0 de côte $z_0 > 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ tangente au cône et perpendiculaire à son axe : $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u_\theta}$.

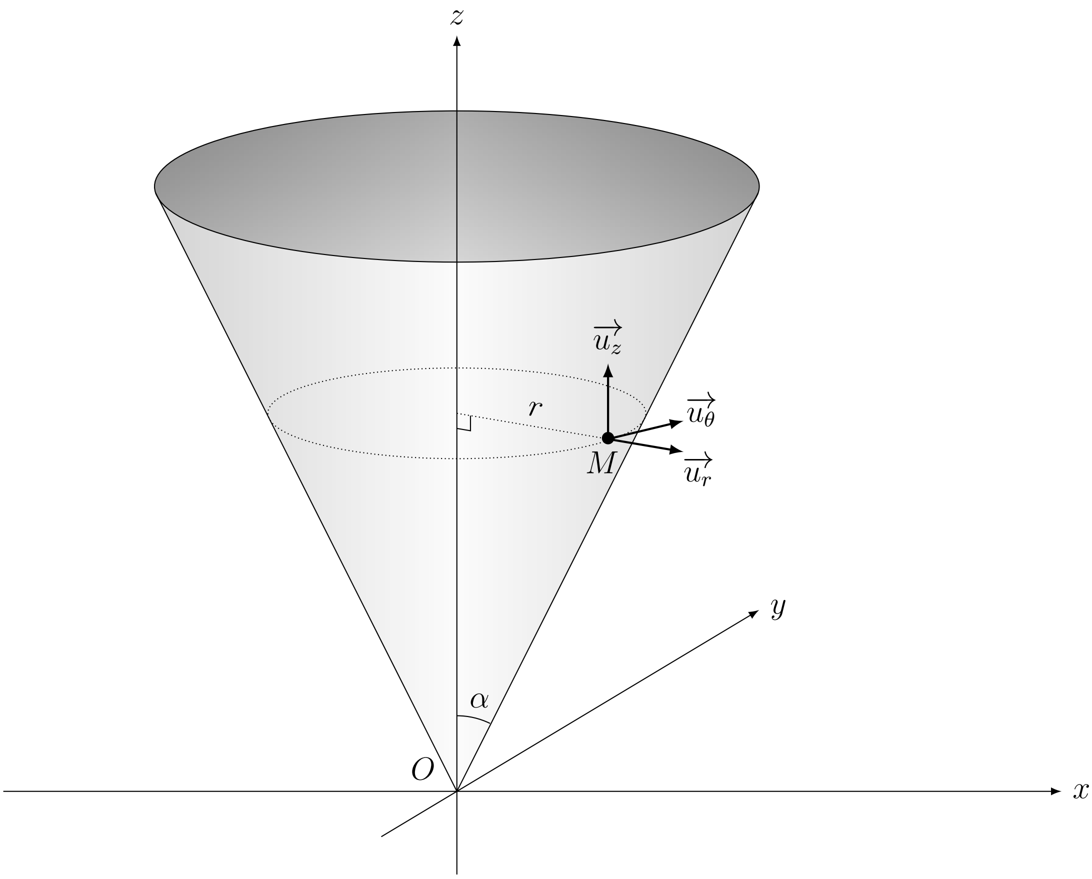

Figure 1 – Bille en mouvement sur la paroi intérieure d'un cône

Q1. Faire un grand schéma, clair et soigné, d'une vue en coupe du cône dans le plan $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$, sur lequel figureront :

- le point M
- l'angle α
- la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
- les coordonnées r et z
- les forces appliquées à M

Q2. Établir l'expression du moment cinétique de M par rapport à l'axe Oz, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_z}$, en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.

Q3. Montrer que cette grandeur est une constante du mouvement, et donner sa valeur.

Q4. Au cours de son mouvement, la bille M tourne autour de l'axe Oz en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône. Expliquer pourquoi.

Q5. Montrer que l'énergie mécanique est également une constante du mouvement, et donner sa valeur.

Q6. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(z)$ associée à cette situation, en fonction de z, m, α, r_0, v_0 et g.

Q7. Montrer qu'en posant $Z = \frac{z}{z_0}$, l'énergie potentielle effective établie à la question Q6. peut se mettre sous la forme :

$$E_{p,\text{eff}}(z) = G(Z) = \frac{mv_0^2}{2\,Z^2} + mgz_0\,Z$$

Q8. Montrer que $G(1) = E_\text{m}$. En déduire une condition sur $\dfrac{G(Z)}{G(1)}$ au cours du mouvement de la bille.

Q9. Déterminer les limites de la fonction $G(Z)$, et montrer qu'elle possède un extremum (que l'on admettra être un minimum) en Z_e tel que :

$$Z_e = \left(\frac{v_0^2}{gz_0}\right)^{1/3} \qquad \text{et} \qquad G(Z_e) = \frac{3mgz_0}{2}\left(\frac{v_0^2}{gz_0}\right)^{1/3}$$

Q10. On s'intéresse au cas où $v_0 = \sqrt{gz_0}$.
Déterminer la valeur de Z_e et de $\dfrac{G(Z_e)}{G(1)}$, puis tracer la fonction $\dfrac{G(Z)}{G(1)}$ en fonction de Z.
En déduire la nature de la trajectoire de la bille M.

Q11. On s'intéresse au cas où $v_0 < \sqrt{gz_0}$.
Déterminer la position de son minimum par rapport à celui du cas étudié à la question Q10 (où $v_0 = \sqrt{gz_0}$), puis tracer sur le même graphique qu'à la question Q10 mais d'une couleur différente la fonction $\dfrac{G(Z)}{G(1)}$ en fonction de Z.
Décrire le mouvement de la bille, en précisant ses altitudes extrêmes (à exprimer en fonction de z_0, v_0 et g).

Q12. On s'intéresse au cas où $v_0 > \sqrt{gz_0}$.
Déterminer la position de son minimum par rapport à celui du cas étudié à la question Q10 (où $v_0 = \sqrt{gz_0}$), puis tracer sur le même graphique qu'à la question Q10 mais d'une troisième couleur la fonction $\dfrac{G(Z)}{G(1)}$ en fonction de Z.

Exercice 3 : Étude d'un satellite de télédétection terrestre ($\sim$ 33%)

Adapté du sujet ATS 2014

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce problème le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

Données :

- Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km
- Masse du satellite : $m = 4{,}00 \times 10^3$ kg
- Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
- Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·m^{-2}

FIGURE 1 – Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

Partie I. Caractéristiques du mouvement du satellite

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T =$ et de centre O. L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen au cours du temps noté t.

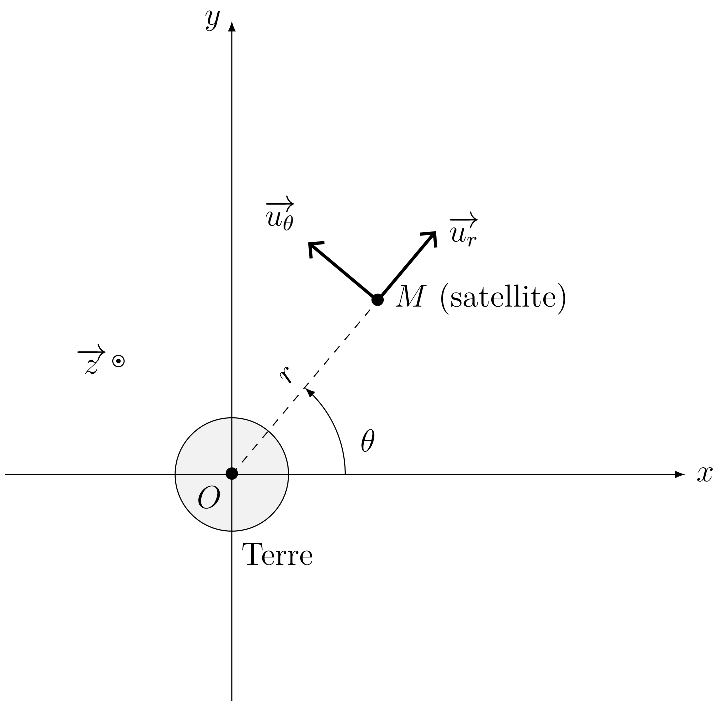

FIGURE 2 – Modélisation du mouvement du satellite

Q1. Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pg} de M, en fonction de m, M_T, G, et $r = OM$, supposant sa valeur nulle lorsque M est situé à une distance infinie de la Terre.

Q2. Montrer que le mouvement du satellite modélisé par M est plan.

Q3. On suppose que le mouvement du satellite se fait dans le plan (Oxy) de la figure 2. Montrer que la quantité $C = r^2\,\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

Q4. On considère un satellite placé en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre.

(a) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme et exprimer v^2 en fonction de G, M_T et r.

(b) Application numérique : déterminer, en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, la valeur de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire à une altitude $1500\,\mathrm{km}$.

(c) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, M_T, G et r. Justifier le signe de E_m.

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

— phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée, point d'injection sur l'orbite circulaire ;

— phase de satellisation : la satellite accélère brutalement (grâce à l'allumage de moteurs) pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

Q5. Alors qu'on voulait placer le satellite sur une orbite circulaire de rayon r_0, une erreur de trajectoire se produit au point d'injection sur orbite (noté M_0, tel que $OM_0 = r_0$) : on confère bien au vecteur vitesse le même module v_0 que pour l'orbite circulaire de rayon r_0 mais le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ fait un angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ avec la direction prévue (voir figure 3). Justifier que la trajectoire du satellite après M_0 sera elliptique et déterminer la valeur de son demi-grand axe.

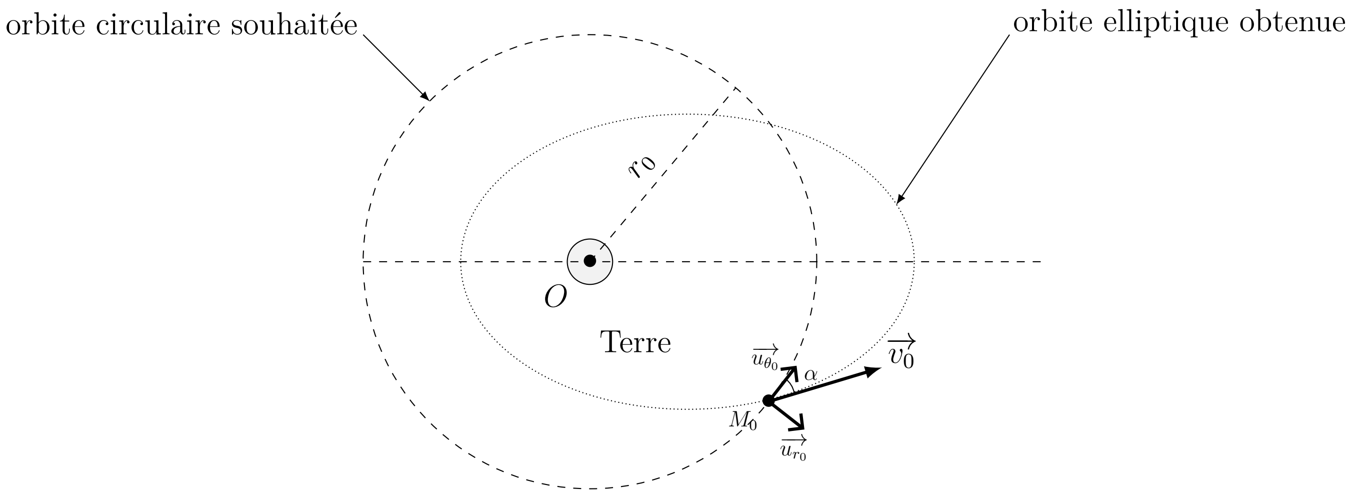

FIGURE 3 – Erreur de trajectoire

Q6. Montrer grâce aux conditions initiales que la constante des aires caractérisant le mouvement du satellite sur son orbite elliptique est : $C' = r_0\, v_0\, \cos\alpha$.

Q7. Montrer qu'au périgée et à l'apogée de cette ellipse :

$$E_m = \frac{m\,C'^2}{2r^2} - \frac{G\,M_T\,m}{r}$$

(r étant la distance du point considéré de l'ellipse au centre de la terre : périgée ou apogée)

Q8. Établir un polynôme en r, dont les coefficients seront exprimés en fonction de r_0 et α. En déduire les distances r_P et r_A au centre O de la Terre au périgée et à l'apogée de la trajectoire en fonction de r_0 et α.

Q9. Déterminer les vitesses v_A et v_P du satellite à l'apogée et au périgée.