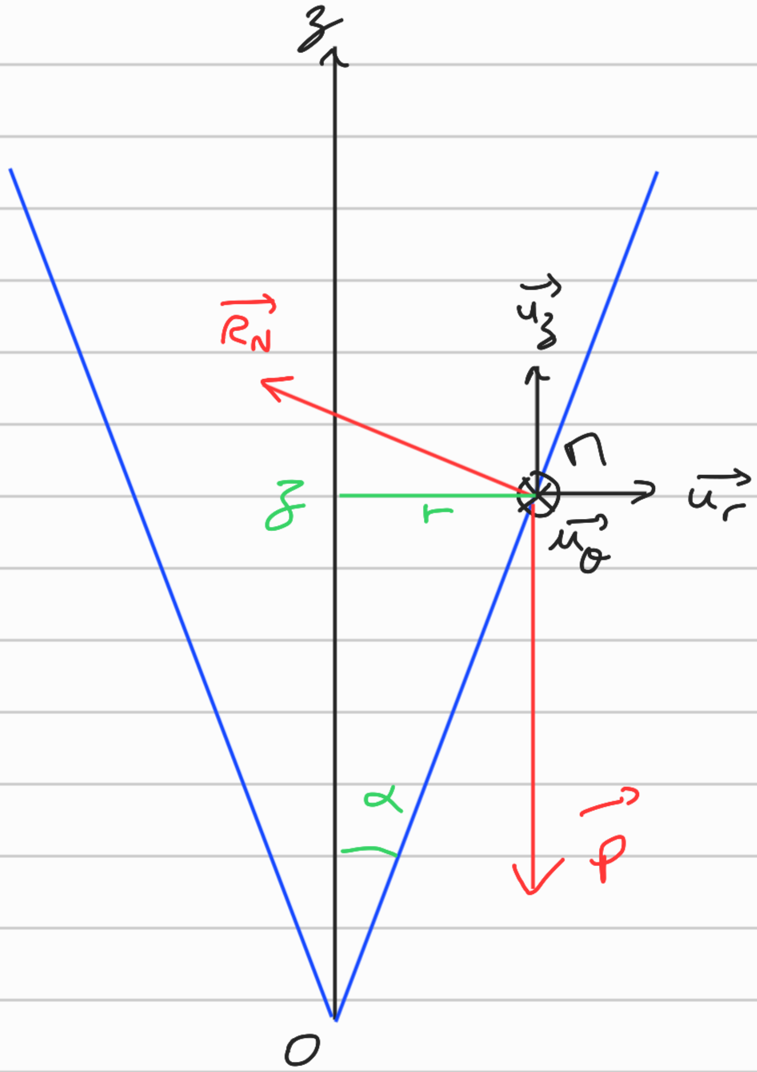
DS 7 . Correction physique

Exercice 2 :

Q1.



Q2. Dans le référentiel R_T supposé galiléen :

$$\mathcal{L}_{Oz}(M) = \vec{\mathcal{L}_O}(M) \cdot \vec{u_z} = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u_z}$$

En coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{Oz}(M) = m(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}) \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}) \cdot \vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_{Oz}(M) = mr^2\dot{\theta}}$$

Q3. D'après le TMC scalaire appliqué à M dans $\mathcal{R}_T$ galiléen :

$$\frac{d\mathcal{L}_{Oz}(M)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext})$$

BAM : $\vec{R_N}$ réaction normale du support (cône)

$\vec{P}$ poids $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$

La droite support de $\vec{R_N}$ coupe l'axe (Oz)
donc $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R_N}) = 0$

La droite support de $\vec{P}$ est parallèle à (Oz)
donc $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = 0$

On a donc $\dfrac{d\mathcal{L}_{Oz}(M)}{dt} = 0$

$\boxed{\mathcal{L}_{Oz}(M) = cte}$ (intégrale première du mouvement)

A l'instant initial :

$\vec{OM}(0) = r_0\vec{u_r} + z_0\vec{u_z}$ avec $r_0 = z_0 \tan\alpha$

et $\vec{v}(0) = v_0\vec{u_\theta} = r_0\dot{\theta}_0\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{Oz}(M)_{t=0} = m(z_0\tan\alpha)^2\dfrac{v_0}{z_0\tan\alpha} = \mathcal{L}_{Oz}(M)\ \forall t$

$$\boxed{\mathcal{L}_{Oz}(M) = m z_0 \tan\alpha\, v_0}$$

Q4. $\mathcal{L}_{Oz}(M)$ est constant égal à $m z_0 \tan\alpha\, v_0$

$$\Rightarrow \quad m r^2 \dot{\theta} = m z_0 \tan\alpha\, v_0 > 0$$

r ne peut donc pas s'annuler, et $\dot{\theta}$ ne peut pas changer de signe

Au cours de son mouvement ultérieur, la bille ne peut pas tomber au fond du cône et elle ne peut pas changer de sens de rotation autour de Oz.

Q5. D'après le TEM appliqué à $\{M\}$ dans R_T galiléen entre l'instant initial et la date t :

$$\Delta E_m = \Sigma W(\vec{F}_{nc})$$

$\vec{P}$ étant une force conservative et $\vec{R_N}$ étant orthogonale au déplacement (qui est tangent au cône), on a

$\Delta E_m = 0$ d'où $E_m = cte$.

A l'instant initial : $E_m(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$

d'où $\boxed{E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0}$

Q6. $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$.

avec $\frac{r}{z} = \tan\alpha \Rightarrow r = z\tan\alpha$

et $mr^2\dot{\theta} = mz_0\tan\alpha\, v_0 \Leftrightarrow z^2\tan^2\alpha.\dot{\theta} = z_0\tan\alpha\, v_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{z_0 v_0}{z^2\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m(\dot{z}\tan\alpha)^2 + \frac{1}{2}m(z\tan\alpha)^2\left(\frac{z_0v_0}{z^2\tan\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m(1+\tan^2\alpha)\dot{z}^2}_{\text{énergie cinétique verticale}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{z_0^2v_0^2}{z^2} + mgz}_{E_{p\,eff.}(z)}$$

$$\boxed{E_{p\,eff}(z) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + mgz}$$

Q7 En posant $Z = \frac{z}{z_0}$: $\boxed{G(Z) = \frac{mv_0^2}{2Z^2} + mgz_0 Z}$

Q8 $G(1) = \frac{mv_0^2}{2} + mgz_0 = E_m$

Or $G(Z) = E_{peff}(z) \Rightarrow$ au cours du mouvement $G(Z) \leq G(1)$ car $E_{peff} \leq E_m$

(E_c verticale ≥ 0)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{G(Z)}{G(1)} \leq 1}$$

Q9 $\lim_{z \to 0} G(z) = +\infty$ et $\lim_{z \to +\infty} G(z) = +\infty$

Recherche d'un extremum : annulation de sa dérivée

$$\frac{dG}{dz} = \frac{m v_0^2}{2}(-2z^{-3}) + mg\mathfrak{z}_0 = -m\frac{v_0^2}{z^3} + mg\mathfrak{z}_0$$

$$\frac{dG}{dz} = 0 \iff \frac{v_0^2}{z_e^3} = g\mathfrak{z}_0$$

$$\iff \boxed{z_e = \sqrt[3]{\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}} = \left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{1/3}}$$

$$G(z_e) = \frac{m v_0^2}{2\left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{2/3}} + mg\mathfrak{z}_0\left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{1/3}$$

$$G(z_e) = \frac{m v_0^2}{2\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}}\left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{1/3} + mg\mathfrak{z}_0\left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{G(z_e) = \frac{3mg\mathfrak{z}_0}{2}\left(\frac{v_0^2}{g\mathfrak{z}_0}\right)^{1/3}}$$

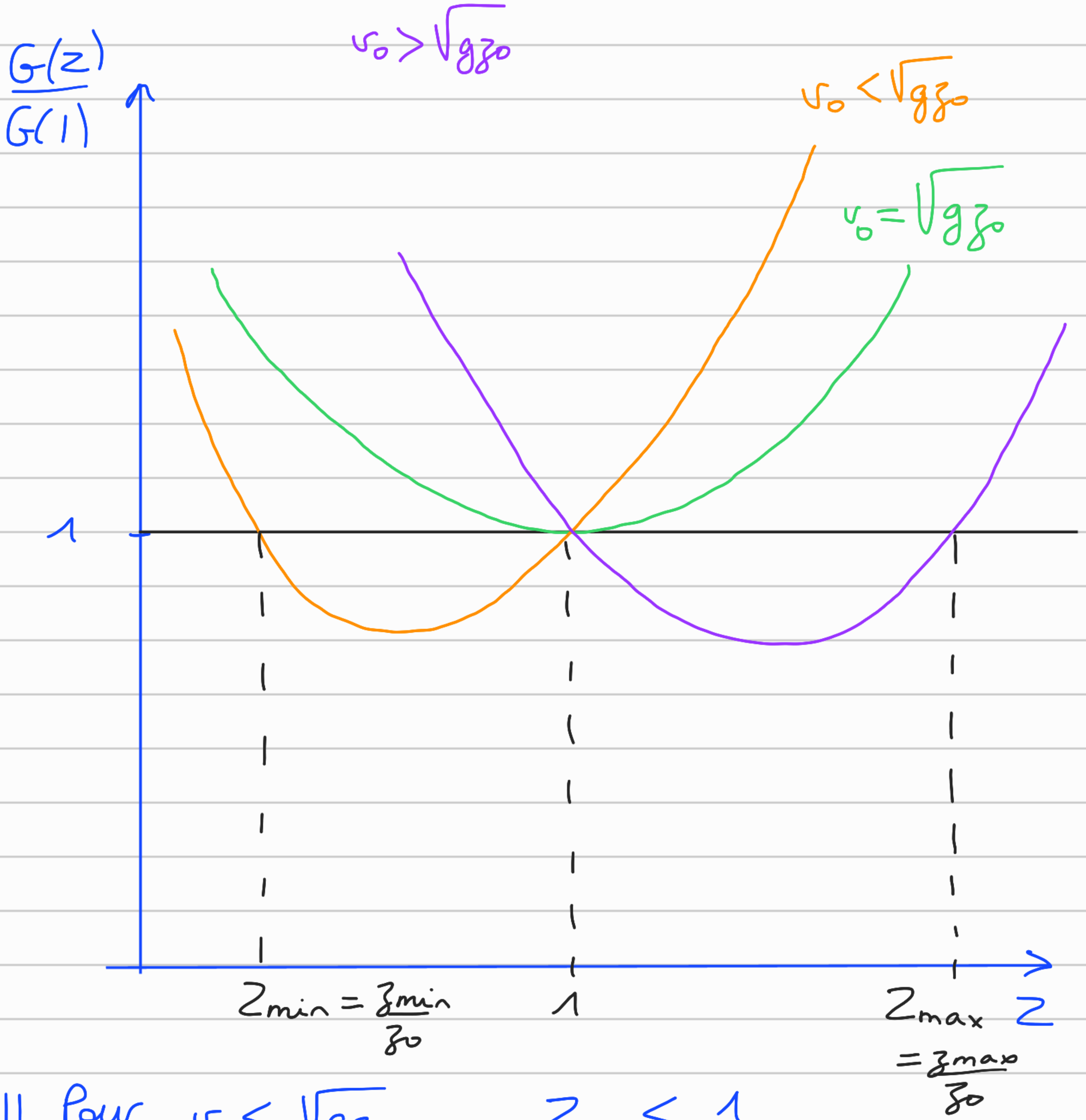
Q10. Pour $v_0 = \sqrt{g\mathfrak{z}_0}$: $z_e = 1$

$G(z_e) = \frac{3}{2}mg\mathfrak{z}_0 = G(1)$

$$\Rightarrow \frac{G(z_e)}{G(1)} = 1$$

Le minimum de $\frac{G(Z)}{G(1)}$ a pour coordonnées $(1,1)$

$Z=1$ est donc la seule valeur possible
$\Rightarrow z = z_0$ donc le mouvement est circulaire.



Q11. Pour $v_0 < \sqrt{g z_0}$ $\quad Z_e < 1$

De plus $\frac{dG}{dZ} = -m \frac{v_0^2}{Z^3} + m g z_0$

donc $\left.\frac{dG}{dZ}\right|_{Z=1} = -mv_0^2 + mgz_0 > 0$

$\Rightarrow \frac{G(Z)}{G(1)}$ est croissante en $Z = 1$

$\Rightarrow$ La bille a un mouvement entre 2 altitudes z_{min} et z_0 avec

z_{min} telle que $G(Z_{min}) = G(1)$

$$\frac{mv_0^2}{2Z_{min}^2} + mgz_0 Z_{min} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

$$\frac{v_0^2}{2}\left(\frac{1}{Z_{min}^2} - 1\right) = gz_0\left(1 - Z_{min}\right)$$

$$\frac{v_0^2}{2gz_0}\left(\frac{1}{Z_{min}} - 1\right)\left(\frac{1}{Z_{min}} + 1\right) = Z_{min}\left(\frac{1}{Z_{min}} - 1\right)$$

$\Rightarrow$ première solution $Z_{min} = 1$ (qui est en fait le max à l'instant initial)

ou $\frac{v_0^2}{2gz_0}\left(\frac{1}{Z_{min}} + 1\right) = Z_{min}$

$$\Leftrightarrow Z_{min}^2 - \frac{v_0^2}{2gz_0} Z_{min} - \frac{v_0^2}{2gz_0} = 0$$

$$\Delta = \frac{v_0^4}{4g^2z_0^2} + 4\frac{v_0^2}{2gz_0} = \frac{v_0^4}{4g^2z_0^2}\left(1 + \frac{8gz_0}{v_0^2}\right)$$

$$\boxed{z_{min} = \frac{v_0^2}{4 g z_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 g z_0}{v_0^2}}\right)}$$

Rq : on peut vérifier que $z_{min} < 1$ pour $v_0^2 < g z_0$

Q12. Pour $v_0 > \sqrt{g z_0}$ $\quad z_e > 1$

De plus $\frac{dG}{dz} = -m\frac{v_0^2}{z^3} + m g z_0$

donc $\left.\frac{dG}{dz}\right|_{z=1} = -m v_0^2 + m g z_0 < 0$

$\Rightarrow \frac{G(z)}{G(1)}$ est décroissante en $z = 1$.

La bille a un mouvement entre 2 altitudes z_0 et z_{max} avec z_{max} telle que
$G(z_{max}) = G(1)$

$$\frac{m v_0^2}{2 z_{max}^2} + m g z_0 z_{max} = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$$

$\Rightarrow$ même équation qu'à la question Q11

$$\boxed{z_{max} = \frac{v_0^2}{4 g z_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 g z_0}{v_0^2}}\right)}$$

(et idem $z_{min} > 1$ pour $v_0^2 > g z_0$)

Exercice 3 :

Q1. La force d'interaction gravitationnelle $\vec{F_g} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{u_r}$ dérive de $E_{p,g}$ donc :

$$\delta W(\vec{F_g}) = -dE_{pg}$$

$$-G\frac{mM_T}{r^2}\underbrace{\vec{u_r}\cdot d(r\vec{u_r})}_{= dr\vec{u_r} + \underbrace{r\vec{u_r}\cdot d\vec{u_r}}_{=0}} = -dE_{pg}$$

$$-GmM_T\frac{dr}{r^2} = -dE_{pg}$$

$$-d\left(-\frac{GmM_T}{r}\right) = -dE_{pg}$$

$$\Rightarrow E_{p,g} = -G\frac{mM_T}{r} + cte$$

La constante est nulle car $E_{p,g}(\infty) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{p,g} = -G\frac{mM_T}{r}}$$

Q2. D'après le TMC appliqué à $\{M\}$ dans R_g galiléen :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_{ext}})$$

M subit seulement $\vec{F_g}$ qui est colinéaire à $\vec{OM}$ donc $\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{F_g}) = \vec{OM} \wedge \vec{F_g} = \vec{0}$.

D'où $\vec{\mathcal{L}_0}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{K}$

Avec $\vec{K}$ = vecteur constant orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{OM}$ tout au long du mouvement.

$\Rightarrow$ A chaque instant $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{K}$ (défini par $\vec{OM_0} \wedge m\vec{v_0}$) donc $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont contenus dans le plan $(O, M_0, \vec{v_0})$ tout au long du mouvement.

Q3. $\vec{\mathcal{L}_0}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u_r} \wedge m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$
$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{u_3}$

Or $\vec{\mathcal{L}_0}(M) = \vec{K}$ constant.

$\Rightarrow mr^2\dot{\theta} = cte$, et m étant constant

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = cte}$$

Q4a) D'après le PFD appliqué à $\{M\}$ dans R_g galiléen :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F_{ext}} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{u_r}$$

De plus en mouvement circulaire
$\vec{OM} = r\vec{u_r}$ avec $r = cte$
donc $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$
$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u_r} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} = -\frac{v^2}{r}\vec{u_r} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\begin{cases} -G\frac{mM_T}{r^2} = -m\frac{v^2}{r} \\ 0 = mr\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \dot{\theta} = cte \text{ donc } v = cte.$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{GM_T}{r}}$$

b) AN : $v = \underline{7{,}11.10^3 \, m.s^{-1}} = \underline{25{,}6.10^3 km.h^{-1}}$

c) $E_c = \frac{GmM_T}{2r}$

$E_m = G\frac{mM_T}{2r} - G\frac{mM_T}{r} = -\frac{GmM_T}{2r} = -E_c$

$E_m < 0$ ce qui est cohérent avec un état lié.

Q5. Sur l'orbite circulaire prévue :
$E_m = -\frac{GmM_T}{2r_0}$
Le satellite en M_0 possède la même énergie cinétique et la même énergie potentielle donc il a la même énergie mécanique.

D'où $E_m = -\frac{G m M_T}{2 r_0} < 0$ donc c'est un état lié.

Comme $\vec{v_0}$ n'est pas selon $\vec{u_\theta}$ la trajectoire ne peut être circulaire $\Rightarrow$ c'est une ellipse.

L'énergie mécanique sur une ellipse vaut $E_m = -\frac{G m M_T}{2a}$

Par identification : $\boxed{a = r_0}$

Q6. Il s'agit d'un mouvement à force centrale $\Rightarrow$ le moment cinétique de M est conservé

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}_0}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

À $t=0$ $\vec{OM_0} = r_0 \vec{u_r}$

$$\vec{v_0} = v_0 \cos\alpha \, \vec{u_\theta} + v_0 \sin\alpha \, \vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}_0}(M) = (r_0 \vec{u_r}) \wedge m(v_0 \cos\alpha \, \vec{u_\theta} + v_0 \sin\alpha \, \vec{u_r})$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}_0}(M) = m r_0 v_0 \cos\alpha \, \vec{u_z}$$

La constante des aires $\frac{\mathcal{L}_0(M)}{m}$ vaut donc $\boxed{C' = r_0 v_0 \cos\alpha}$

Q7. $E_m = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{G m M_T}{r}$$

Or on a $\overrightarrow{\mathcal{L}_0(M)} = r\vec{u_r} \wedge m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$

$$= m r^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z} = m C' \vec{u_z}$$

D'où $\dot{\theta} = \dfrac{C'}{r^2}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{C'^2}{r^4} - \frac{G m M_T}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m C'^2}{2 r^2} - \frac{G m M_T}{r}$$

A l'apogée et au périgée $\dot{r} = 0$ (positions la plus éloignée et la plus proche de O).

$$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{m C'^2}{2 r^2} - \frac{G m M_T}{r} \quad \text{en } A \text{ et } P}$$

Q8. On injecte les expressions de C', E_m et v_0 dans la relation ci-dessus :

$$C' = r_0 v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad E_m = -\frac{GmM_T}{2r_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{GmM_T}{2r_0} = \frac{m r_0^2 v_0^2 \cos^2\alpha}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

$$\text{et} \quad v_0^2 = \frac{GM_T}{r_0}$$

$$-\frac{GmM_T}{2r_0} = \frac{m r_0^2 GM_T \cos^2\alpha}{2r_0 \cdot r^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

$$-1 = \frac{r_0^2}{r^2}\cos^2\alpha - \frac{2r_0}{r}$$

$$\boxed{r^2 - 2r_0 \cdot r + r_0^2 \cos^2\alpha = 0}$$

$$\Delta = 4r_0^2 - 4r_0^2\cos^2\alpha = 4r_0^2 \sin^2\alpha$$

$$r_{A,P} = \frac{2r_0 \pm 2r_0 \sin\alpha}{2}$$

$$\boxed{r_A = r_0(1+\sin\alpha) \qquad r_P = r_0(1-\sin\alpha)}$$

Q9. D'après la constante des aires :

$$C' = r_0 v_0 \cos\alpha = r_A v_A = r_P v_P$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = v_0 \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \qquad v_P = v_0 \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}$$