

Devoir surveillé n° 8

Durée : 2 heures

Préambule : Exemple d'en-tête de concours

« La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est recommandé de lire le texte en entier.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. »

Plan :

Ce devoir se compose de 2 exercices indépendants :

- L'exercice 1 porte sur la séparation d'isotopes de l'uranium par effusion gazeuse.
- L'exercice 2 s'intéresse au moteur Stirling.

Exercice 1 : Séparation isotopique par effusion gazeuse

Adapté des épreuves E4A PSI 2003 et Centrale Supélec PC 2010.

75% de l'énergie électrique consommée en France provient de réacteurs nucléaires dont 90% utilisent comme combustible de l'oxyde d'uranium UO_2 , dont la teneur en uranium 235 (seul isotope fissile) doit atteindre un seuil de 4%. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235. L'enrichissement par effusion gazeuse, étudié dans ce problème, est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la faible différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 , pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Données :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Modélisation du procédé d'enrichissement par effusion gazeuse

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T . Le compartiment (1) contient N molécules d'hexafluorure d'uranium UF_6 , considéré comme un gaz parfait, alors que le compartiment (2) est vide. À l'instant initial ($t = 0$), un très petit orifice de surface s est percé entre les deux compartiments permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse. On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules à la date t dans le compartiment (1) et (2) respectivement.

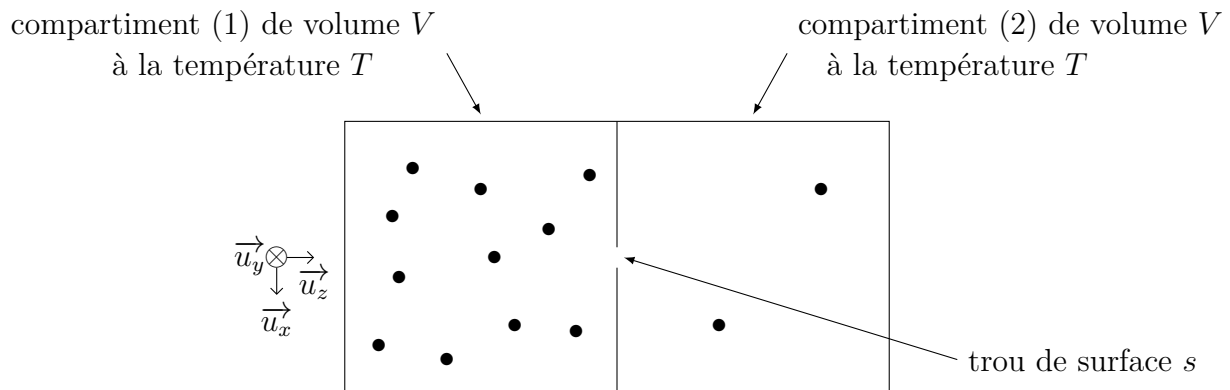


FIGURE 1 – Dispositif de séparation isotopique par effusion gazeuse, à une date $t > 0$

L'espace est rapporté au trièdre direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec \vec{u}_z normal au trou orienté vers le compartiment (2). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules dans les compartiments (1) et (2) à l'instant t .

On adopte le modèle simplifié suivant :

- Le trou est petit ;
- Le gaz se détend lentement en restant au repos donc tout mouvement macroscopique est négligé ;
- La répartition des molécules est uniforme dans les deux compartiments ;
- Les vitesses des molécules ne sont orientées que selon $\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z$ avec une norme identique égale à la vitesse quadratique moyenne notée u .

Partie I. Étude de l'effusion d'un gaz de molécules identiques

- Q1. Donner la définition de la température cinétique.
- Q2. Établir, à partir de la réponse à la question Q1, l'expression de la vitesse quadratique moyenne u en fonction de la masse molaire du gaz M , la constante des gaz parfaits R et la température du gaz T .
- Q3. On fait l'hypothèse que la distribution des vitesses est isotrope et que seule $\frac{1}{6}$ ^e des molécules se dirige selon $+\vec{u}_z$ avec une vitesse $v_z = u > 0$.
- (a) Exprimer le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface s vers le compartiment (2) pendant une durée dt .
- (b) Exprimer le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface s vers le compartiment (1) pendant la même durée dt .
- Q4. Montrer que $N_1(t)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{6V} N$
- Q5. Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène d'effusion observé.
- Q6. Calculer τ sachant que l'effusion s'effectue à la température $T = 403 \text{ K}$ à travers un pore cylindrique de rayon $r = 0,0100 \mu\text{m}$ et que chaque compartiment possède un volume $V = 32,0 \text{ L}$. Le gaz utilisé a pour masse molaire $M = 352 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Donner le résultat en heures, avec un nombre de chiffres significatifs adapté. Conclure.

Partie II. Étude de l'effusion d'un gaz composé de 2 types de molécules

À l'instant initial, le compartiment (1) contient deux gaz $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masses molaires respectives M_5 et M_8 et de densité moléculaires respectives $n_5^* = \frac{N_5}{V}$ et $n_8^* = \frac{N_8}{V}$. Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz seront indicées respectivement par 5 et 8. On donne $M_5 = 349,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M_8 = 352,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

- Q7. Exprimer le rapport des temps d'effusion $\frac{\tau_8}{\tau_5}$ en fonction des masses molaires M_5 et M_8 , puis le donner sa valeur avec un nombre approprié de chiffres significatifs.
- Q8. En vous appuyant sur le résultat de la question Q7, expliquer comment il est possible d'enrichir en $^{235}\text{UF}_6$ un mélange de $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ par effusion gazeuse.
- Q9. On note Φ_5 le nombre de molécules de l'isotope 235 traversant l'orifice de surface s en une seconde (dans les deux sens), et Φ_8 le nombre de molécules de l'isotope 238 traversant l'orifice de surface s en une seconde.
- Montrer que $\Phi = \frac{n^* s}{6} \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Cette formule est valable pour $^{235}\text{UF}_6$ (Φ_5) et $^{238}\text{UF}_6$ (Φ_8).
- Q10. Le taux d'enrichissement η_e en isotope 235 est défini par le rapport de la proportion de $^{235}\text{UF}_6$ récupéré en sortie du dispositif de séparation isotopique sur sa proportion en entrée. On le calcule avec $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$, avec $R_d =$ coefficients de richesse dans le gaz diffusé $= \frac{\Phi_5}{\Phi_8}$ et $R_0 =$ coefficient de richesse dans le gaz initial $= \frac{n_5^*}{n_8^*}$.
- Exprimer η_e en fonction de M_5 et M_8 , puis déterminer sa valeur numérique.
- Q11. Afin d'optimiser le processus d'enrichissement, une cascade est réalisée en plaçant p dispositifs similaires à celui présenté figure 1 (que l'on nomme étage d'enrichissement) en série, le gaz enrichi de l'étage k alimentant l'entrée de l'étage $k + 1$. Déterminer le nombre p de passages nécessaires à travers les parois poreuses pour arriver à la proportion finale de 4,0% en isotope 235 partant d'un titre initial de 0,71%.
- On supposera que η_e est le taux d'enrichissement de chaque étage.

Exercice 2 : Moteur Stirling

Aucune connaissance particulière sur les machines thermiques (TH5) n'est nécessaire pour traiter ce problème.



Inventé en 1816 par le pasteur et ingénieur Robert Stirling, le moteur Stirling utilise un fluide contenu dans une enceinte fermée, chauffée par une source de chaleur extérieure à l'enceinte. C'est donc un moteur à combustion externe, avec de nombreux avantages par rapport à un moteur à explosion : combustion en continu (plus complète), absence de soupapes d'admission et d'échappement (moins de bruit et de vibrations), et possibilité (théorique) d'utiliser tout combustible solide, liquide, gazeux, solaire, nucléaire. D'où une recherche actuelle très active qui permet d'élaborer des prototypes pour la production d'électricité, l'irrigation et le dessalement de l'eau.

Photo ci-dessus : modèle décoratif de moteur Stirling, utilisant des mèches pour chauffer l'air et mettre en mouvement le disque via les pistons.

Données

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Entropie d'un gaz parfait en fonction des variables T et V :

$$S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T) + nR \ln(V)$$

Modélisation du fonctionnement du moteur Stirling

On considère un système fermé de n moles de gaz parfait (de l'air, par exemple), de coefficient thermodynamique γ , qui évolue entre 4 états successifs, notés A , B , C et D , en effectuant 4 transformations composant un cycle moteur.

Au cours de ce cycle, le système est alternativement en contact avec un thermostat à la température $T_1 = 295 \text{ K}$ (noté thermostat 1, constitué par l'atmosphère), et un autre thermostat à la température $T_2 = 395 \text{ K}$ (noté thermostat 2, constitué par une source de chaleur externe, par exemple la flamme issue d'une combustion ou l'énergie solaire focalisée par un miroir concave).

Les 4 transformations qui constituent le cycle sont mécaniquement réversibles et ont les caractéristiques suivantes :

- $A \rightarrow B$: compression isotherme à la température T_1 (en contact avec le thermostat 1)
- $B \rightarrow C$: échauffement isochore (le système est en contact avec le thermostat 2, et passe de T_1 à T_2)
- $C \rightarrow D$: détente isotherme à la température T_2 (en contact avec le thermostat 2)
- $D \rightarrow A$: refroidissement isochore (le système est en contact avec le thermostat 1, et passe de T_2 à T_1)

On note :

- Q_1 = transfert thermique algébrique reçu par le système entre l'état D et l'état B (c'est à dire au cours des deux transformations successives $D \rightarrow A$ et $A \rightarrow B$, qui ont lieu au contact du thermostat 1).
- Q_2 = transfert thermique reçu par le système entre l'état B et l'état D (c'est à dire au cours des deux transformations successives $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow D$, qui ont lieu au contact du thermostat 2).
- W = travail des forces de pression reçu algébriquement par le gaz sur tout le cycle de transformations.
- $a = \frac{V_A}{V_B}$ = rapport de compression du gaz, avec V_A = volume du gaz dans l'état A et V_B = volume du gaz dans l'état B .

Partie I. Questions générales

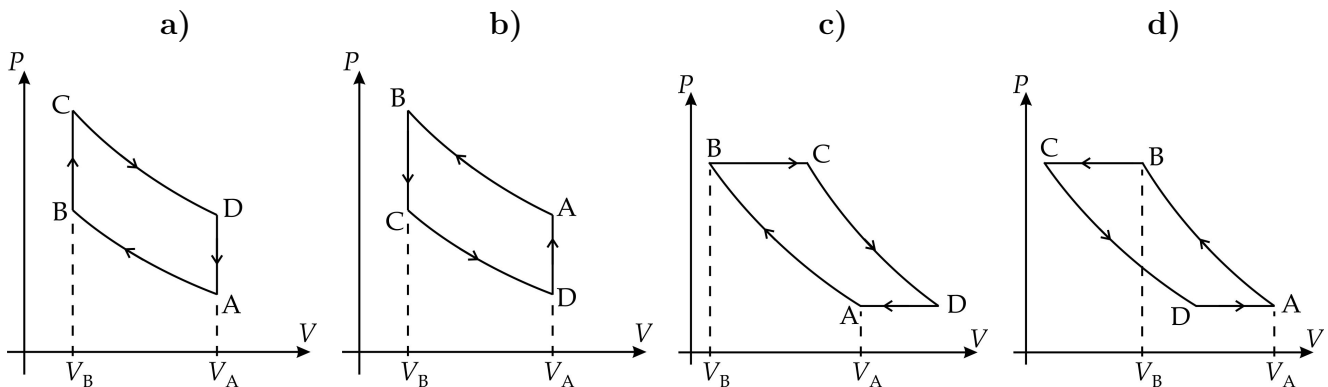
- Q1. Définir la capacité thermique à volume constant C_V et la capacité thermique à pression constante C_P d'un système thermodynamique quelconque.
- Q2. Comment est défini le coefficient thermodynamique γ d'un gaz ?
- Q3. Dans le cas d'un système constitué de n moles de gaz parfait, démontrer la relation :

$$C_P - C_V = nR \quad (\text{appelée relation de Mayer})$$

- Q4. En déduire l'expression de la capacité thermique à volume constant C_V d'un système constitué de n moles de gaz parfait, en fonction de n , R et γ .

Partie II. Étude du cycle Stirling

- Q5. Lequel des cycles ci-dessous correspond au cycle de ce moteur Stirling ? Justifier.



- Q6. Donner, en justifiant, le signe de W , le travail des forces de pression reçu algébriquement par le gaz sur tout le cycle de transformations.
- Q7. Dresser un bilan énergétique du gaz sur tout un cycle de transformations (c'est-à-dire de l'état de départ A à l'état d'arrivée A), et en déduire le lien entre W , Q_1 et Q_2 .
- Q8. Établir l'expression du transfert thermique Q_{AB} reçu par le système pendant la transformation $A \rightarrow B$, en fonction de a , R , n et T_1 . Une justification rigoureuse des étapes du raisonnement est attendue.
- Q9. Établir l'expression du transfert thermique Q_{DA} reçu par le système pendant la transformation $D \rightarrow A$ en fonction de n , γ , R , T_1 et T_2 . Une justification rigoureuse des étapes du raisonnement est attendue.
En déduire l'expression de Q_1 en fonction de n , R , γ , T_1 , T_2 et a .

- Q10. Par analogie avec les deux questions précédentes, établir l'expression de Q_2 en fonction des mêmes variables.
- Q11. En déduire l'expression du travail W reçu sur tout le cycle en fonction de n , R , a , T_1 et T_2 .
Si on veut augmenter le travail reçu au cours d'un cycle, sur quel(s) paramètre(s) peut-on jouer ?
- Q12. Donner l'expression de la variation d'entropie ΔS du gaz au cours de chacune des transformations $D \rightarrow A$, $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow D$.
Que peut-on dire de la variation d'entropie sur tout le cycle $\Delta S_{A \rightarrow A}$?
- Q13. En précisant la température du thermostat au contact duquel se trouve le gaz pendant les transformations $D \rightarrow A$ et $A \rightarrow B$, montrer que l'entropie échangée S_{e1} au cours de l'ensemble de ces deux transformations s'exprime comme :

$$S_{e1} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) - nR \ln(a)$$

- Q14. Obtenir de même l'expression de l'entropie échangée S_{e2} au cours de l'ensemble des deux transformations $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow D$.
- Q15. Déduire des trois questions précédentes l'expression de S_c l'entropie créée totale sur l'ensemble du cycle, en fonction de T_1 , T_2 , n , γ et R .
Que dire de S_c ? Quelle est l'origine de l'irréversibilité de ce cycle ?
- Q16. On définit le rendement d'un moteur thermique par : $\eta = \left| \frac{W}{Q_2} \right|$. Montrer que le rendement du moteur Stirling s'exprime sous la forme :

$$\eta = \frac{1}{\frac{1}{(\gamma - 1) \ln(a)} + \frac{1}{1 - (T_1/T_2)}}$$

- Q17. Le graphique de la figure 3 représente le rendement théorique η , en fonction du rapport des températures des sources T_1/T_2 pour un moteur de rapport de compression $a = 10$, contenant un gaz de coefficient thermodynamique $\gamma = 1,4$.
Déterminer par lecture graphique la limite maximale vers laquelle semble tendre le rendement. Cette limite correspond-elle au cas où les deux sources sont à des températures très proches, ou très différentes ?
Vérifier ce résultat à l'aide de la formule analytique.
- Q18. Déterminer le rendement du moteur étudié dans ce problème, par lecture graphique sur la figure 3.

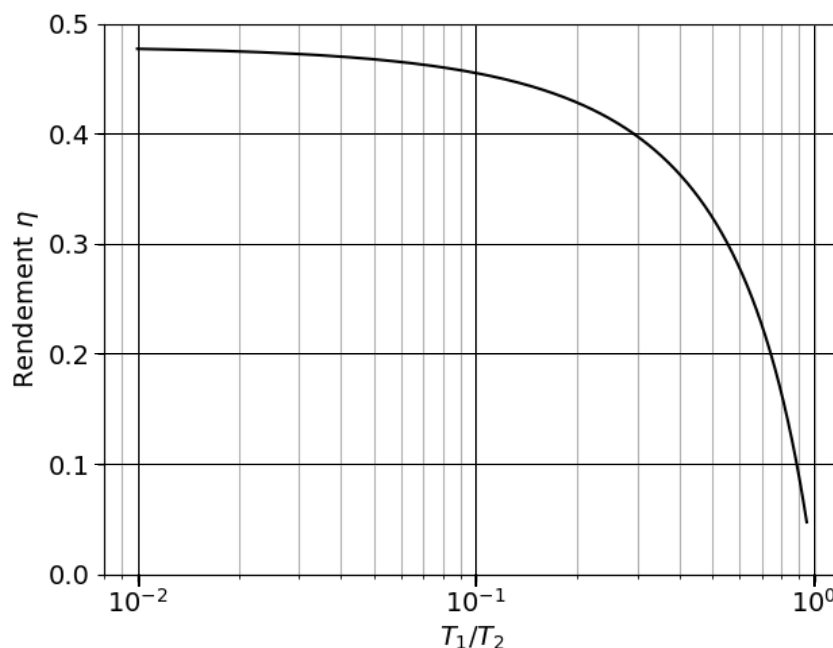


FIGURE 3 – Rendement du moteur Stirling en fonction du rapport des températures des sources (calculé pour $a = 10$ et $\gamma = 1,4$)