

DS 8 correction

Exercice 1 :

$$Q1. \quad \boxed{\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m u^2}$$

avec k_B = cte de Boltzmann

T = température cinétique en K.

m = masse d'une particule du gaz en kg

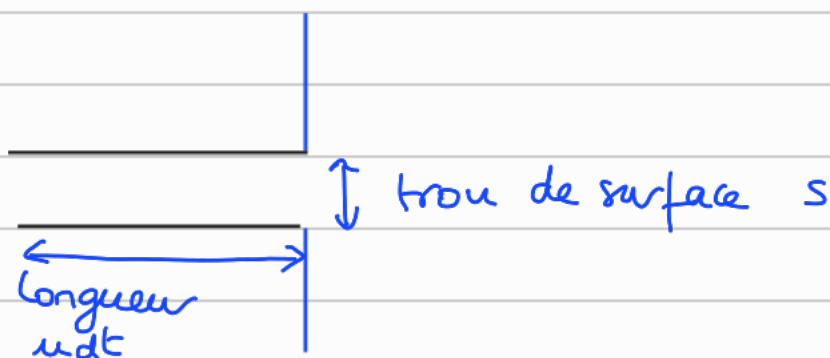
u = vitesse quadratique moyenne en $m \cdot s^{-1}$.

$$Q2. \quad u^2 = \frac{3k_B T}{m}$$

$$\text{or } m = \frac{\rho}{N_A} \Rightarrow u^2 = \frac{3 \cdot \overbrace{N_A}^R \cdot k_B T}{\rho}$$

$$\text{d'où } \boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{\rho}}}$$

Q3. a)



les particules qui vont passer du compartiment 1 au compartiment 2 pendant la durée dt sont celles qui sont contenues dans le volume $s u dt$ et qui ont une vitesse dirigée suivant $+\vec{u}_z$, soit $\frac{1}{6}$ des particules

présentes dans ce volume $\Rightarrow dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} n_1^* s u dt$

avec $n_1^* = \text{densité particulière} = \frac{N_1(t)}{V}$

$$dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$$

b) De même $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} n_2^* s u dt$

$$dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u dt$$

Q4. Entre t et $t + dt$ on a

$$N_1(t + dt) - N_1(t) = + dN_{2 \rightarrow 1} - dN_{1 \rightarrow 2}$$

$$dN_1 = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u dt - \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$$

$$\text{or } N_2 = N - N_1$$

$$\Rightarrow dN_1 = \frac{1}{6} \frac{(N - N_1)}{V} s u dt - \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$$

$$\Rightarrow dN_1 + \frac{1}{3} \frac{N_1}{V} s u dt = \frac{1}{6} \frac{N}{V} s u dt$$

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{s u}{3V} N_1 = \frac{s u}{6V} N$$

q5 On résoud cette équation différentielle du 1^e ordre à coefficients constants :

Sous forme canonique $\frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1}{\tau} = \frac{su}{\delta V} N$

avec $\tau = \frac{3V}{su}$

Solution : * solution particulière $N_{1p} = \frac{N}{2}$

* solution générale de l'équation homogène $N_{1h} = A e^{-t/\tau}$

\Rightarrow solution complète : $N_1(t) = \frac{N}{2} + A e^{-t/\tau}$

Conditions initiales : $N_1(0) = N$

$$\Rightarrow N = \frac{N}{2} + A \Rightarrow A = \frac{N}{2}$$

$$N_1(t) = \frac{N}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = \frac{3V}{su}$$

$$\text{Et } N_2(t) = N - N_1(t)$$

$$N_2(t) = N - \frac{N}{2} - \frac{N}{2} e^{-t/\tau}$$

$$N_2(t) = \frac{N}{2} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = \frac{3V}{su}$$

$$Q6. AN: \tau = \frac{3.32,0 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (1,00 \cdot 10^{-8})^2} \cdot \sqrt{\frac{3.8,31.403}{352 \cdot 10^{-3}}} = 1,81 \cdot 10^{12} \text{ s}$$

Soit $\tau = \underline{5,73 \cdot 10^4 \text{ ans}}$ (3 c.s car 3 dans les données)

Le régime permanent serait donc atteint au bout de 5τ soit plus de 200 000 ans !

C'est une durée très longue à l'échelle humaine, mais elle est calculée pour 1 pore. Dans le cas d'une membrane poreuse, il y a certainement un nombre important de pores.

$$Q7. \frac{\tau_8}{\tau_5} = \frac{3V}{s_{u_8}} \frac{s_{u_5}}{3V} = \frac{u_5}{u_8} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{m_5}}}{\sqrt{\frac{3RT}{m_8}}}$$

$$\boxed{\frac{\tau_8}{\tau_5} = \sqrt{\frac{m_8}{m_5}}}$$

$$AN: \frac{\tau_8}{\tau_5} = \sqrt{\frac{352}{349}} = \underline{1,004}$$

Q8. Les deux molécules ayant des temps d'effusion différents, ils ne vont pas "sortir" du compartiment 1 à la même vitesse.

$\tau_8 > \tau_5$ donc les molécules

$^{235}\text{UF}_6$ sortiront plus rapidement et au bout de quelques τ le contenu du compartiment 2 sera enrichi en uranium 235.

$$\text{Q9. } \phi = \frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt} + \frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt}$$

or on a établi précédemment :

$$dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt \quad \text{et} \quad dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u dt$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u + \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u \quad \text{or} \quad N_1 + N_2 = N$$

$$\text{et} \quad u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{6} \frac{N}{V} s \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\text{Soit } \boxed{\phi = \frac{n^* s}{6} \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

$$\text{Q10 } \eta_e = \frac{\phi_5}{\phi_8} \times \frac{n_8^*}{n_5^*}$$

$$= \frac{n_5^* s}{6} \sqrt{\frac{3RT}{M_5} \cdot \frac{6}{n_8^* s}} \sqrt{\frac{M_8}{3RT}} \times \frac{n_8^*}{n_5^*}$$

$$\boxed{\eta_e = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}}}$$

$$\eta_e = \frac{\tau_8}{\tau_5} = \underline{\underline{1,004}}$$

Q 11 Pour 1 étage le taux d'enrichissement vaut 1,004 donc la proportion d'isotopes 235 en sortie vaut $0,71 \cdot 10^{-2} \times 1,004$.

Après le 2^{ème} étage d'enrichissement :
la proportion d'isotopes 235 vaut $0,71 \cdot 10^{-2} \cdot 1,004^2$

⇒ Après p étages : $0,71 \cdot 10^{-2} \cdot 1,004^p$

On souhaite atteindre 4%.

$$\Rightarrow 0,71 \cdot 10^{-2} \cdot 1,004^p = 4 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow 1,004^p = 4/0,71$$

$$\Rightarrow p \ln 1,004 = \ln \left(\frac{4}{0,71} \right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{\ln \left(\frac{4}{0,71} \right)}{\ln 1,004} = \underline{\underline{433}}$$

Exercice 2

$$Q1. \quad C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_v \quad \left(\text{ou } C_v = \frac{dU}{dT} \text{ pour les GP} \right. \\ \left. \text{car } U \text{ ne dépend que } T \right) \\ C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p \quad \left(\text{ou } C_p = \frac{dH}{dT} \text{ pour les GP} \right)$$

$$Q2. \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$Q3. \quad dU = C_v dT$$

$$dH = C_p dT$$

$$\text{et } H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV) \\ = dU + nR dT$$

$$C_p dT = C_v dT + nR dT$$

$$\boxed{C_p = C_v + nR}$$

$$Q4. \quad C_p = \gamma C_v \Rightarrow \gamma C_v = C_v + nR$$

$$\boxed{C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

$$\text{et } \boxed{C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$$

Q5. Diagramme (a) car 2 isotherme et 2 isochores (BC et DA verticales sur le diagramme PV)
↳ (c) et (d) impossibles

* A-B compression isotherme
⇒ P augmente.

* BC échauffement isochore : $\frac{T}{P} = \text{cte}$
donc P augmente de B à C
(car T augmente)
↳ (b) impossible.

Q6. le travail correspond à l'opposé de l'aire sous la courbe dans le diagramme PV

$$\Rightarrow W_{AB} > 0 \quad \text{et} \quad W_{CD} < 0$$

$$\text{avec} \quad |W_{AB}| < |W_{CD}|$$

$$\text{et} \quad W_{BC} = W_{DA} = 0$$

Pour le cycle entier on a donc

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} < 0$$

(ou : * le cycle est donc moteur ⇒ $W < 0$
* cycle parcouru dans le sens horaire)

Q7. Bilan énergétique : $\Delta U = 0$ sur un cycle complet (le système revient dans le même état, or u est une fonction d'état)

D'après le 1^{er} principe : $\Delta U = W + Q = 0$

$$\text{ici } Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow \boxed{W + Q_1 + Q_2 = 0}$$

Q8. Sur une isotherme, l'énergie interne d'un GP reste constante (1^{ère} loi de Joule)

le 1^{er} principe donne donc

$$\Delta U_{AB} = 0 = W_{AB} + Q_{AB}$$

Soit $\boxed{Q_{AB} = -W_{AB}}$

$$\text{Et } W_{AB} = \int_A^B -P_{\text{ext}} dV = \int_A^B -P dV \quad \text{car}$$

la transformation AB est isotherme donc le système est en équilibre avec le milieu extérieur.

$$\text{Pour le GP } P = \frac{nRT}{V}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -nRT_1 \int_A^B \frac{dV}{V}$$

$$W_{AB} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_1 \ln a$$

D'où $Q_{AB} = -nRT_1 \ln a$

Q9. Le 1^{er} principe appliqué au système sur la transformation D-A donne :

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} + Q_{DA}$$

Or DA est une isochore $\Rightarrow W_{DA} = 0$

$$\Rightarrow Q_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V (T_1 - T_2)$$

$$Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)$$

On en déduit $Q_1 = Q_{DA} + Q_{AB}$

$$Q_1 = -nRT_1 \ln a + \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)$$

Q10 Par analogie :

* sur l'isotherme CD :

$$W_{CD} = -nRT_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right)$$

or $V_D = V_A$ et $V_C = V_B$

$$\Rightarrow W_{CD} = -nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} = -nRT_2 \ln a$$

donc $Q_{CD} = nRT_2 \ln a$

* Sur l'isochore BC : $Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$

$$Q_2 = nRT_2 \ln a + \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

Q11. D'après le 1^{er} principe : $W = -Q_1 - Q_2$

$$W = -nR \ln a (T_2 - T_1)$$

Pour augmenter W on peut augmenter le rapport de compression a ou la différence de température $(T_2 - T_1)$

Q12. $\Delta S_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_A}{T_D} + nR \ln \frac{V_A}{V_D}$

or $V_A = V_D$ et $T_A = T_1 = T_B$; $T_D = T_2 = T_C$

$$\Delta S_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2}$$

et $V_B = V_C$

$$\Delta S_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

or $T_B = T_A \Rightarrow$

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_c}{T_B} + nR \ln \frac{V_c}{V_B}$$

or $V_c = V_B$ et $T_c = T_2$; $T_B = T_1$

$$\Delta S_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_{CD} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_D}{T_C} + nR \ln \frac{V_D}{V_C}$$

or $V_D = V_A$ et $V_C = V_B$; $T_D = T_C$

$$\Delta S_{CD} = nR \ln \frac{V_A}{V_B}$$

$$\Delta S_{AA} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA}$$

$$= nR \ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_A}{V_B} + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2}$$

\Rightarrow $\Delta S_{AA} = 0$ ce qui est cohérent pour un cycle.

Q13. Pendant D-A et A-B le système est au contact du thermostat à T_1 :

$$S_{\text{échi}} = \frac{Q_1}{T_1}$$

$$S_{\text{éch.1}} = -nR \ln a + \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Q14 Pendant B-C et C-D le système est au contact du thermostat à T_2 :

$$S_{\text{éch.2}} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$S_{\text{éch.2}} = nR \ln a + \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

Q15. D'après le second principe on a

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}} = S_{\text{éch.1}} + S_{\text{éch.2}} + S_{\text{créée}}$$

d'où $S_{\text{créée}} = -S_{\text{éch.1}} - S_{\text{éch.2}}$

$$S_{\text{créée}} = nR \ln a - \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - nR \ln a - \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$S_{\text{créée}} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_1}{T_2} - 1\right)$$

$$S_{\text{créée}} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} - 2\right)$$

$$S_{crée} = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{T_2^2 + T_1^2 - 2T_1T_2}{T_1T_2}$$

$$S_{crée} = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1T_2}$$

Dès que $T_1 \neq T_2$ $S_{crée}$ est positive.

\Rightarrow Ce cycle est irréversible.

L'irréversibilité est due à l'inhomogénéité de température sur les transformations D-A et BC.

(en D, le système à T_2 , est mis en contact avec le thermostat à T_1).

$$Q16 \quad \eta = \left| \frac{W}{Q_2} \right| = -\frac{W}{Q_2}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{nR \ln a (T_2 - T_1)}{nRT_2 \ln a + \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)}$$

$$\eta = \frac{1}{\frac{1}{(\gamma-1) \ln a} + \frac{T_2}{T_2 - T_1}}$$

$$\eta = \frac{1}{\frac{1}{(\gamma-1) \ln a} + \frac{1}{1 - T_1/T_2}}$$

Q17. Le rendement limite vaut 0,5 quand $\frac{T_1}{T_2}$ tend vers 0, c'est à $T_1 \ll T_2$ donc lorsque les températures T_1 et T_2 sont très différentes (T_2 très élevée).

Avec l'expression théorique :

$$\lim_{\frac{T_1}{T_2} \rightarrow 0} \eta = \frac{1}{\frac{1}{0,4 \times 23} + 1} = \underline{0,5}$$

\Rightarrow en accord avec le graphique.

Q 18. Pour le moteur étudié :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{295}{395} \approx 0,75.$$

Par lecture graphique $\eta \approx 0,19$

