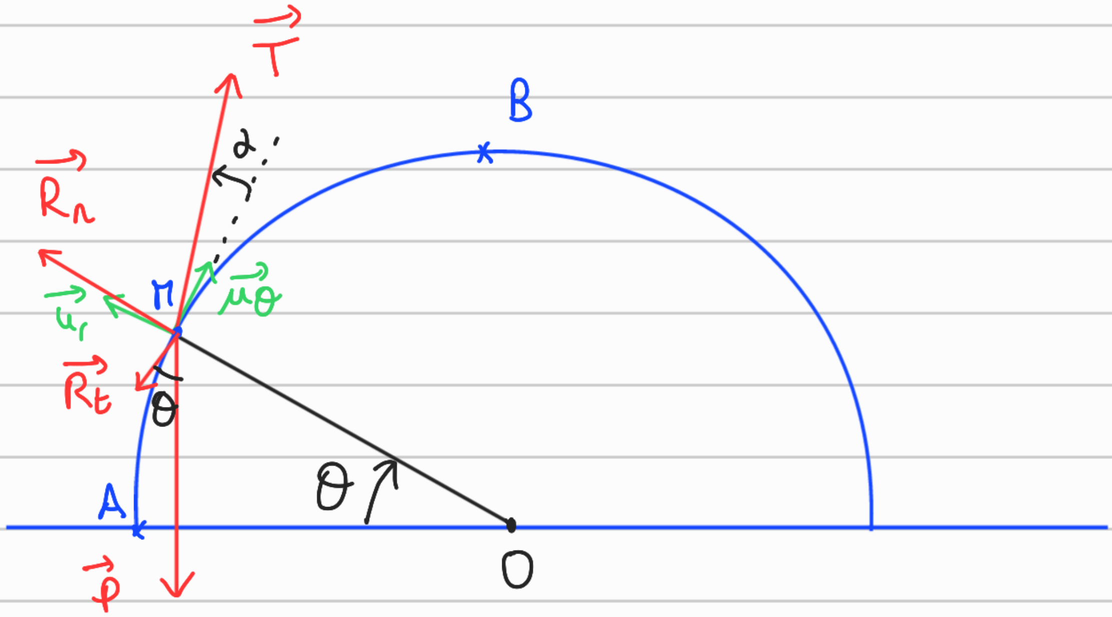
TD MECA 3

Exercice 4 :

Q1 On étudie le système {point M} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On utilise une base polaire.



Q2. $W(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T} . d\vec{OM}$

avec $\vec{T} = T \cos\alpha \, \vec{u_\theta} + T \sin\alpha \, \vec{u_r}$

et $d\vec{OM} = R d\theta \, \vec{u_\theta}$.

Soit $W(\vec{T}) = \int_A^B TR\cos\alpha \, d\theta = TR\cos\alpha \left[\theta\right]_0^{\pi/2}$

$$\boxed{W(\vec{T}) = RT\cos\alpha \frac{\pi}{2}}$$

Q3. Pour $v = cte$ on a $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

avec $\dot{\theta} = cte$ d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au système $\{M\}$: dans le référentiel terrestre galiléen, on a

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{R_n} + \vec{R_t} = m\vec{a}$$

Soit en projection sur $\vec{u_r}$:

$$-mg\sin\theta + T\sin\alpha + R_n = -mR\dot{\theta}^2$$

Soit $\boxed{R_n = -mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha}$

Q4. $\vec{F_f} = \vec{R_t}$ avec $\|\vec{F_f}\| = f \cdot \|\vec{R_n}\|$.

$$W(\vec{F_f}) = \int_A^B \vec{F_f} \cdot d\vec{OM} \quad \text{avec} \quad \vec{F_f} = -fR_n\,\vec{u_\theta}$$

et $d\vec{OM} = R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

donc $W(\vec{F_f}) = \displaystyle\int_A^B -fR_n \cdot R\,d\theta$

$$= -fR\int_A^B \left(-mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha\right)d\theta$$

$$W(\vec{F_p}) = fR^2 m\dot{\theta}^2 [\theta]_0^{\pi/2} + fRmg[\cos\theta]_0^{\pi/2} + T\sin\alpha[\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= fR^2 m\dot{\theta}^2 \frac{\pi}{2} + fmRg(0-1) + T\sin\alpha \frac{\pi}{2} . fR$$

avec $R\dot{\theta} = v$ on obtient :

$$W(\vec{F_p}) = fv^2 m \frac{\pi}{2} - fmgR + T\sin\alpha \frac{\pi}{2} . fR$$

$$\boxed{W(\vec{F_p}) = mfv^2 \frac{\pi}{2} - fmRg + fRT\sin(\alpha)\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 5 :

Q1. Bilan des forces sur le système {vélo + cycliste} :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* réaction de la route : $\vec{R}$ (orthogonale au sol)
* force motrice horizontale de puissance P
* frottements de l'air : $\vec{F_p} = -kv.\vec{v}$.

le théorème de la puissance cinétique appliqué au système considéré permet d'écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(m\vec{g}) + P(\vec{R}) + P + P(\vec{F_f})$$

avec $P(\vec{F_i}) = \vec{F_i} . \vec{v}$

Soit $\frac{dE_c}{dt} = 0 + 0 + P - kv.\vec{v}.\vec{v}$

$$\frac{dE_c}{dt} = P - kv^3$$

avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ soit $\frac{dE_c}{dt^2} = mv . \frac{dv}{dt}$

or $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} . v$.

$$\Rightarrow \boxed{mv^2 \frac{dv}{dx} = P - kv^3}$$

Q2. $f(x) = P - kv^3$ donc $mv^2 \frac{dv}{dx} = f(x)$

et $\frac{df}{dx} = -3kv^2 \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3k} \frac{df}{dx}$$

En injectant dans l'équation précédente on obtient :

$$-\frac{m}{3k}\frac{df}{dx} = f(x)$$

Soit $\boxed{f'(x) + \frac{3k}{m}f(x) = 0}$

Q3. C'est une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants, dont la solution générale est :

$$f(x) = A e^{-x/L} \quad \text{avec} \quad L = \frac{m}{3k}$$

On utilise la valeur initiale : $v(x=0) = v_0$

$$f(0) = P - kv_0^3 = A e^0$$

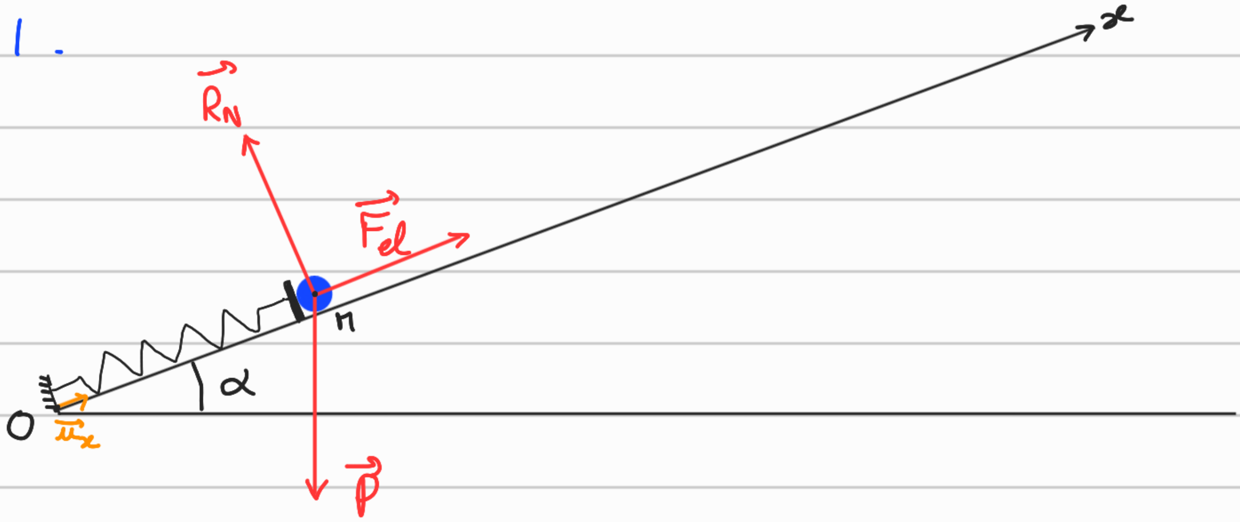
$$\Rightarrow A = P - kv_0^3$$

D'où $P - kv^3 = (P - kv_0^3)e^{-x/L}$

Soit $\boxed{v(x) = \left(\frac{P - (P-kv_0^3)e^{-x/L}}{k}\right)^{1/3}}$

Exercice 7 :

Q1.



On étudie le système {bille} modélisé par le point matériel M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* réaction du support : $\vec{R_N}$
* force de rappel élastique : $\vec{F_{el}} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$
avec l = longueur du ressort à l'instant t.
L'origine du repère étant à l'extrémité du ressort $l(t) = x \Rightarrow \vec{F_{el}} = -k(x - l_0)\vec{u_x}$

* Energie potentielle de pesanteur :
$E_{pp} = mgh + K$ avec $h = l\sin\alpha = x\sin\alpha$ et $K = cte$.

$E_{pp} = mgx\sin\alpha + K$
or $E_{pp}(x=0) = 0$

$$\boxed{E_{pp} = mgx\sin\alpha}$$

* Energie potentielle élastique :

$E_{pel} = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 + K'$ avec $K' = cte$

or $E_{pp}(x = l_0) = 0 \Rightarrow K' = 0$

$\boxed{E_{pel} = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2}$ valable pour $x < l_0$.

Q2. $E_p(M) = E_{pp} + E_{pel}$

* pour $x < l_0$ $E_p(M) = mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

AN : $E_p(M) = 0{,}150 \times 9{,}81 \times x \times \sin(6) + 1/2 \cdot 40 \, (x - 0{,}10)^2$

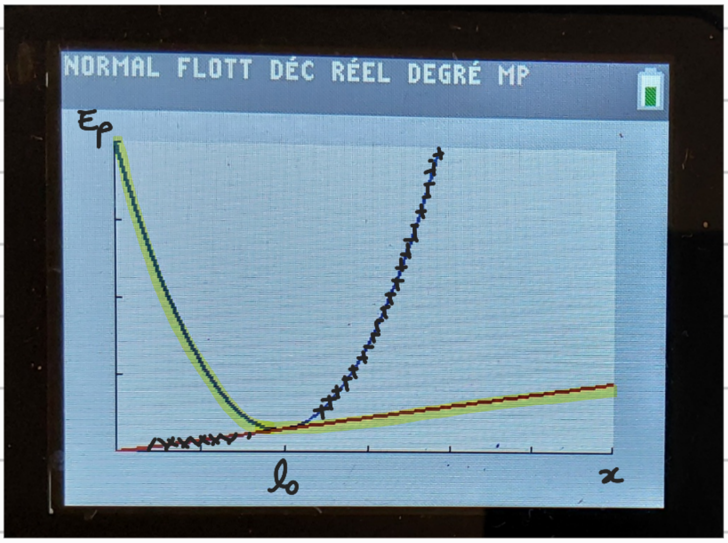
$= 0{,}154 \cdot x + 20x^2 + 0{,}2 - 4x$

$= 20x^2 - 3{,}846\, x + 0{,}2$

* pour $x > l_0$ $E_p(M) = mgx\sin\alpha$.

AN : $E_p(M) = 0{,}150 \times 9{,}81 \times x \times \sin 6$

$= 0{,}154\, x$.



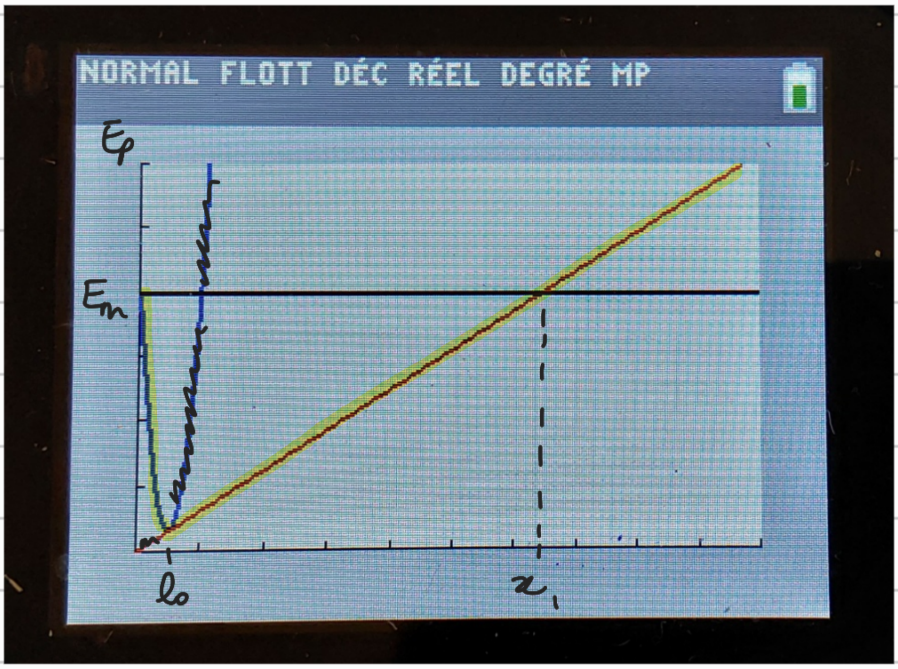
$\lim_{x \to +\infty} E_p = +\infty$ donc il n'existe pas d'énergie mécanique telle que $E_m > E_{pp}$ pour $x \to +\infty$. $\Rightarrow$ pas d'état libre possible

A l'état initial :

* $E_{pp} = 0$ (ressort comprimé au maximum et on considère $x = 0$)
* $E_{pel} = \frac{1}{2} k \ell_0^2$
* $E_c = 0$ (bille lâchée sans vitesse initiale)

donc $E_m(0) = \frac{1}{2} k \ell_0^2$.

AN : $E_m(0) = 0{,}5 . 40 \times 0{,}10^2 = 0{,}2$ J



E_m est constante car la bille est soumise à 2 forces conservatives ($\vec{P}$ et $\vec{F_{el}}$) et une force qui ne travaille pas.

Point de vitesse nulle : $x = 0$

$x = x_1$ pour $E_m = E_p$

Point de vitesse maximale : $x = \ell_0$ pour E_p minimale

Q3. La bille quitte le ressort pour $x = \ell_0$.

On a alors $E_p = m g \ell_0 \sin\alpha$

D'où $E_c = \frac{1}{2} k \ell_0^2 - m g \ell_0 \sin\alpha$

Soit $\frac{1}{2} m v_{\ell_0}^2 = \frac{1}{2} k \ell_0^2 - m g \ell_0 \sin\alpha$

$$v_0^2 = \frac{k}{m} \ell_0^2 - 2 g \ell_0 \sin\alpha$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \ell_0^2 - 2 g \ell_0 \sin\alpha}}$$

AN : $v_0 = \sqrt{\frac{40}{0{,}150} \times 0{,}1^2 - 2 . 9{,}8 . 0{,}10 . \sin 6} = \underline{1{,}6 \text{ m.s}^{-1}}$

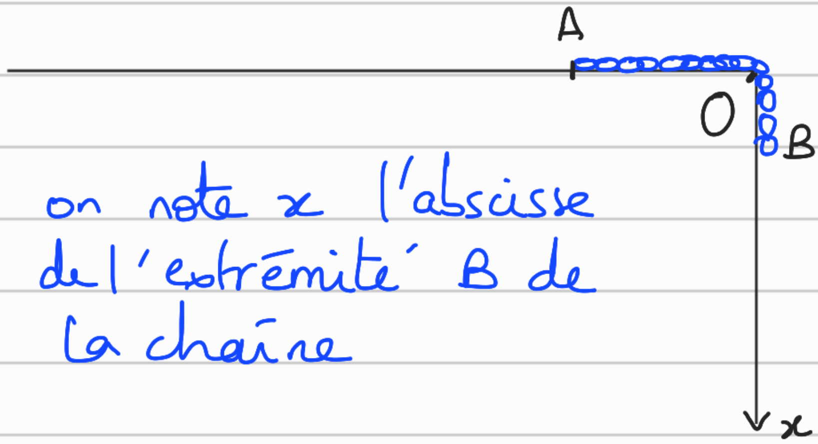
Q4. La distance maximale atteinte (x_1) par la bille est telle que :

$E_m = m g x_1 \sin\alpha$

$$\boxed{x_1 = \frac{k \ell_0^2}{2 m g \sin\alpha}}$$

AN : $x_1 = \frac{40 . 0{,}1^2}{2 . 0{,}150 . 9{,}8 . \sin 6} = \underline{1{,}3 \text{ m}}$.

Exercice 8 :



on note x l'abscisse de l'extrémité B de la chaîne

Bilan des forces :
* $\vec{P} = m\vec{g}$
* $\vec{R_N}$ sur la partie horizontale

Q1. Cette chaîne subit une force conservative et une force qui ne travaille pas ($\vec{R_N} \perp$ déplacement).

Donc $E_m = cte$.

* $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ avec $m = \lambda L$ et $v = \dot{x}$

soit $E_c = \frac{1}{2} \lambda L \dot{x}^2$

* $E_{pp} = -m' g h' + E_p(0)$

avec $E_p(0)$ = énergie potentielle lorsque toute la chaîne est posée sur la table.
et m' = masse de la partie verticale de la chaîne $m' = x . \lambda$
h' = centre de masse de la partie verticale de la chaîne : $h' = \frac{x}{2}$

Soit $E_{pp} = -\lambda g x . \frac{x}{2} + E_p(0)$

$$E_{pp} = -\lambda g \frac{x^2}{2} + E_p(0).$$

On a donc $\frac{1}{2}\lambda L \dot{x}^2 - \lambda g \frac{x^2}{2} + E_p(0) = cte.$

Soit $\lambda L \dot{x}\ddot{x} - \lambda g \dot{x} x = 0$

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0}$$

Q2. Le PFD appliqué au système {chaîne} dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{P}' = 0$

avec $\vec{P}$ = poids de la partie horizontale de la chaîne : $\vec{P} = (m - m')\vec{g}$

$\vec{P}'$ = poids de la partie verticale de la chaîne : $\vec{P}' = m'\vec{g}$.

En projetant sur l'axe horizontal :

$\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$

Il reste donc $m\ddot{x} = m'g$

Soit $\lambda . L \ddot{x} = \lambda x g$

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0}$$

Q3. $\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$

on pose $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

La solution de cette équation différentielle est $x(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$

(discriminant du polynôme caractéristique >0)

On détermine les constantes avec les conditions initiales : à $t=0$ $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{cases} l_0 = A + B \\ 0 = (A-B)\omega_0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{l_0}{2}$$

$$x = \frac{l_0}{2}\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right)$$

$$\boxed{x = l_0 \,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}$$

Exercice 9

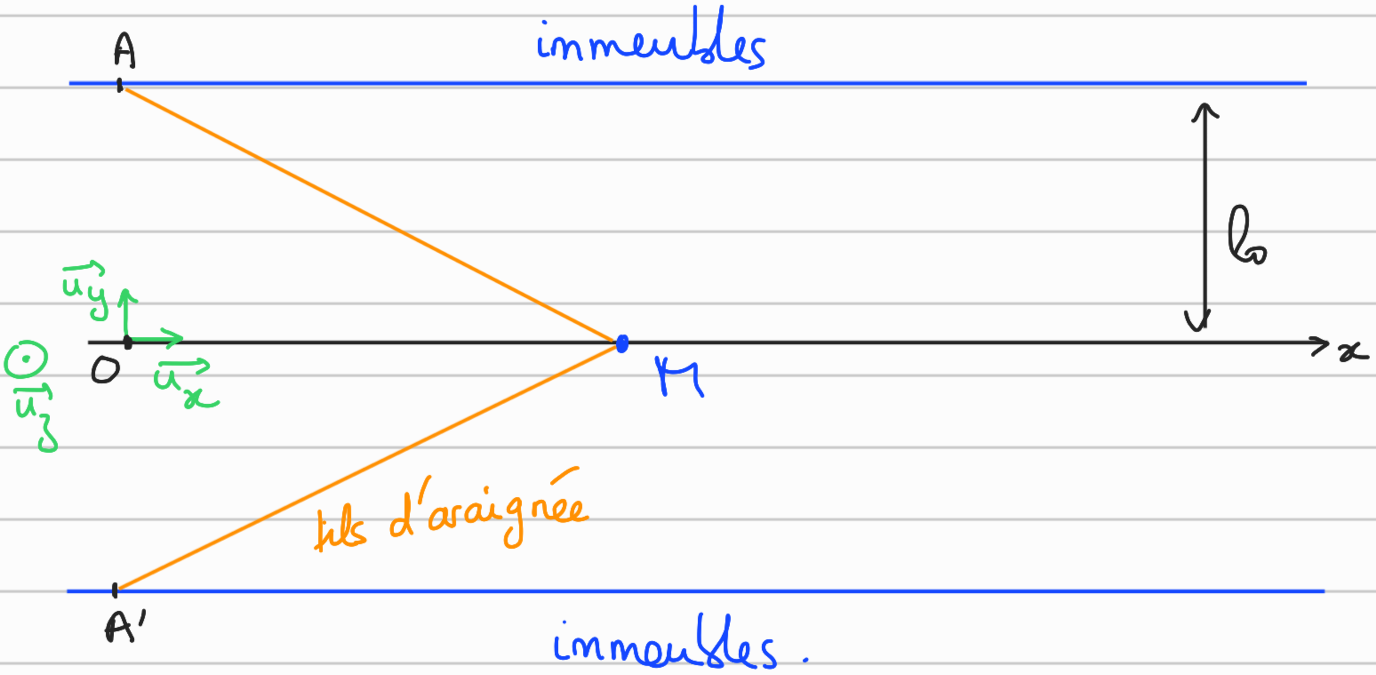
* Système étudié : {Spider-Man + rame} de masse $\underbrace{368.10^3 \times 6}_{6 \text{ wagons}} + \underbrace{246 \times 6 \times 70}_{246 \text{ passagers par wagon}} = 3{,}2.10^5\, kg$

* L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

* Hypothèse : mouvement rectiligne et horizontal pendant la phase de freinage

* Choix du système de coordonnées : cartésien, l'axe Ox dirigé suivant le mouvement du train, l'origine O étant positionnée à la position du train au début du freinage.

* Schéma :



Bilan des forces sur {Spiderman + rame}

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
$\vec{P}$ ne travaille pas car cette force est perpendiculaire au déplacement pendant tout le trajet

* réaction du support $\vec{R}_N$: les frottement sont négligés, la réaction est normale au support donc ne travaille pas.

* La tension de chaque fil de soie d'araignée modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Cette force est conservative. L'énergie potentielle pour les 2 fils s'écrit :
$E_{pel} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \times 2$

avec $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ d'après le théorème de Pythagore

Soit $E_{pel} = k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2$

* On applique le théorème de l'énergie mécanique au système {Spiderman + rame} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{nc})$ or les forces non conservatives ici ne travaillent pas car elles sont orthogonales au déplacement.

Donc $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m = cte$

Soit $\frac{1}{2} m v^2 + k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$

Donc $$v^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{mv_0^2}{2} - k\left(\sqrt{l_0^2+x^2} - l_0\right)^2\right)$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2k}{m}\left(\sqrt{l_0^2+x^2} - l_0\right)^2$$

* le train s'arrête en x_f lorsque $v=0$ soit

$$v_0^2 = \frac{2k}{m}\left(\sqrt{l_0^2+x_f^2} - l_0\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0 = \sqrt{l_0^2+x_f^2} - l_0$$

$$l_0^2 + x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2$$

$$x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2 - l_0^2$$

$$x_f = \sqrt{\left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0\right)^2 - l_0^2} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ On utilisera x_f pour calculer F_{max}
car $F_{max} = k\left(\sqrt{x_f^2 + l_0^2} - l_0\right)$

$$F_{max} = k\left(\sqrt{x_f^2\left(1+\left(\frac{l_0}{x_f}\right)^2\right)} - l_0\right)$$

or étant donnée la vitesse initiale :

$v_0 = 80\,mph$ soit $128\,km/h$ soit $36\,m/s$

et $\ell_0 \simeq 10\,m$ (demi-largeur de la route)

On peut supposer que $x_f \gg \ell_0$ (il lui faut près d'une minute pour arrêter le train).

d'où un approximation pour F_{max} :

$F_{max} \simeq k(x_f - \ell_0) \simeq k x_f$.

* Il faut déterminer k. Pour cela on va utiliser le fait que le train met environ 1 minute pour s'arrêter, or $t_F = \int dt$.

Avec $v = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{2k}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2 + x^2} - \ell_0\right)^2}$

Soit $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2k}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2+x^2} - \ell_0\right)^2}} = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2k}{m}\left(x\sqrt{1+\left(\frac{\ell_0}{x}\right)^2} - \ell_0\right)^2}}$

On utilise à nouveau l'hypothèse $x \gg \ell_0$

Soit $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2k}{m}x^2}} = \dfrac{dx}{v_0\sqrt{1 - \dfrac{2kx^2}{m v_0^2}}}$

Et $t_F = \frac{1}{v_0} \int_0^{x_F} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2kx^2}{mv_0^2}}}$

or $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

On effectue un changement de variable :

$X = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x}{v_0}$

$dX = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{dx}{v_0} \Rightarrow dx = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} dX$

et $t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^{X_F} \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{m}{2k}} \left[\arcsin X\right]_0^{X_F}$

avec $X_F = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x_F}{v_0}$

$t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x_F}{v_0} - \arcsin 0\right)$

or d'après (1) $x_f = \sqrt{\left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0\right)^2 - l_0^2}$

Et avec l'hypothèse $x_F \gg l_0$ on a

$$x_F \approx \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v_0$$

d'où $t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}}\left(\arcsin 1 - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Soit $\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{t_F}$

$$k = \left(\frac{\pi}{2t_F}\right)^2 \times \frac{m}{2}$$

$$\boxed{k = \frac{\pi^2 m}{8 t_F^2}}$$

AN : $k = \frac{\pi^2 . 3{,}2.10^5}{8 . 60^2} = \underline{1{,}1.10^2\ N.m^{-1}}$

et $x_F = \sqrt{\frac{3{,}2.10^5}{2.1{,}1.10^2}} . 36 = \underline{1{,}4.10^3\ m}$.

D'où $F_{max} = 1{,}1.10^2 . 1{,}4.10^3 = \underline{1{,}5.10^5\ N}$