Exercice 5 :

Pour comprendre le comportement de la pompe, il faut s'intéresser au 1er aller-retour du piston :

* A l'instant initial :
  - la pression dans le réservoir et dans le cylindre est P_0
  - la valve K_1 est fermée
  - la valve K_2 est ouverte
  - le volume du cylindre est minimal : $V_{cyl} = V_{min}$

* Dès que le piston remonte, la pression dans le cylindre devient inférieure à P_0 donc la valve K_2 se ferme et la valve K_1 s'ouvre.

* Au cours de la remontée du piston, la quantité de matière de gaz dans l'ensemble cylindre + réservoir est constante, égale à $P_0(V+V_{min})$. Lorsque le piston est au plus haut,

on a donc : $P_1(V+V_{max}) = P_0(V+V_{min})$

Comme $V+V_{max} > V+V_{min}$, on a $P_1 < P_0$

* Au cours de la redescente du piston, la pression dans le cylindre devient supérieure à P_1 donc la valve K_1 se ferme. Le réservoir reste à P_1.

Dans le cylindre : $P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_1 V_{max}$.

Or on avait $P_1 = P_0 \dfrac{V+V_{min}}{V+V_{max}}$

$$\Rightarrow P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_0 \frac{V+V_{min}}{V+V_{max}} \cdot V_{max}$$

$$\Rightarrow P_{cyl} = P_0 \frac{V+V_{min}}{V+V_{max}} \frac{V_{max}}{V_{cyl}}$$

$\Rightarrow$ P_{cyl} augmente lorsque au cours de la descente du piston.

P_{cyl} atteint P_0 pour $V_{cyl} = V_{max} \dfrac{V+V_{min}}{V+V_{max}}$

Remarque : ce volume est supérieur à V_{min} ($V_{cyl} - V_{min} > 0$)

A cet instant la valve K_2 s'ouvre et lorsque le piston est revenu à V_{min} la pression dans le cylindre vaut P_0.

* le processus se répète à chaque aller-retour du piston avec une pression dans le réservoir qui diminue à chaque étape.

Q1. A l'instant $n\tau$:

* la pression dans le cylindre est P_0 et son volume est V_{min}

On a donc $P_0 V_{min} = nRT_0$.

le piston commence à remonter (valve K_1 étant fermée), la valve K_2 se ferme dès le début de la remontée car à la moindre dépression K_2 se ferme.

On a donc $P_{cyl} \cdot V_{cyl} = nRT_0$ (les 2 valves sont fermées)

K_1 s'ouvre lorsque $P_{cyl} = P[n]$

Soit $V_{cyl} = \dfrac{nRT_0}{P[n]}$

Or V_{cyl} ne peut dépasser V_{max}. Pour que K_1 s'ouvre, il faut donc : $\dfrac{nRT_0}{P[n]} < V_{max}$

Or $nRT_0 = P_0 V_{min} \Rightarrow \dfrac{P_0}{P[n]} < \dfrac{V_{max}}{V_{min}}$

Soit $\boxed{P[n] > P_0 \dfrac{V_{min}}{V_{max}}}$

Q2. A la date $t = n\tau$ la loi du GP donne :

$$P_0 V_{min} = x_n R T_0$$ dans le cylindre

$$P[n] . V = y_n R T_0$$ dans l'enceinte

avec x_n = quantité de matière de gaz dans le cylindre (volume V_{min})

y_n = quantité de matière de gaz dans l'enceinte (volume V)

Le piston remonte sans que K_2 ne s'ouvre car la pression dans le cylindre est inférieure à P_0.

Or il y a conservation de la matière au cours de la remontée du piston (K_2 étant fermée). On a donc :

$$x_n + y_n = \frac{P_0 V_{min}}{R T_0} + \frac{P[n] V}{R T_0} = \frac{P[n+1](V + V_{max})}{R T_0}$$

Soit : $(x_n + y_n) R T_0 = P_0 V_{min} + P[n] . V = P[n+1](V + V_{max})$

$$\Rightarrow \Big(P[n+1] - P[n]\Big)(V + V_{max}) + P[n] V_{max} = P_0 V_{min}$$

$$\Rightarrow P[n+1] - P[n] + P[n] \frac{V_{max}}{V + V_{max}} = \frac{P_0 V_{min}}{V + V_{max}}.$$

En identifiant, on obtient :

$$a = \frac{V_{max}}{V + V_{max}} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{min}}{V + V_{max}}$$

Q2. $\dfrac{P[n+1]-P[n]}{\tau} + \dfrac{a}{\tau} P[n] = P_0 \dfrac{b}{\tau}$

Soit pour $\tau \to 0$ $\dfrac{dP(t)}{dt} + \dfrac{a}{\tau} P(t) = \dfrac{b}{\tau} P_0$

Q3. Solution : $P(t) = \dfrac{b}{a} P_0 + A e^{-\frac{at}{\tau}}$

On détermine A avec les conditions initiales : à $t=0$ $P(0) = P_0$

$\Rightarrow P_0 = \dfrac{b}{a} P_0 + A \Rightarrow A = P_0\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)$

Soit $P(t) = \dfrac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0\left(1 - \dfrac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}\, t/\tau}{V+V_{max}}}$

Q4. a) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \dfrac{b}{a} P_0 = \dfrac{V_{min}}{V_{max}} P_0$

AN : $P(\infty) = \dfrac{1}{10} 10^5 = 10^4$ Pa.

b) On avait montré que $P[n] > \dfrac{P_0 V_{min}}{V_{max}}$

donc la pression limite est $P_{min} = P_0 \dfrac{V_{min}}{V_{max}}$

* La pompe fonctionne tant que la pression dans l'enceinte est assez élevée pour permettre l'ouverture de K,

* La pression finale dans l'enceinte est celle obtenue lorsque, quand le piston est en position haute on a $P(\infty)$.
Soit par conservation de la matière :
$P_0 V_{min} = P(\infty) V_{max}$.

c) On remplace $P[n]$ et $P[n+1]$ par $P(\infty)$

$$P[\infty] - P[\infty] + P[\infty] \cdot \frac{V_{max}}{V+V_{min}} = \frac{P_0}{V+V_{max}}$$

$$\Leftrightarrow \quad P[\infty] = P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

Q5. D'après la relation obtenue entre $P[n+1]$ et $P[n]$ on a :

$$P[n+1] = P[n] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

et $$P[n] = P[n-1] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

d'où $$P[n+1] = P[n-1] \cdot \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^2 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}}\right)$$

$$P[n+1] = P[n-2] \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^3 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}} + \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P[0]\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^i$$

somme des n+1 premiers termes d'1 suite géométrique de raison q et de 1er terme a =

$$\frac{(1-q)^{n+1}}{1-q} \qquad \Rightarrow \sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}}{1-\frac{V}{V+V_{max}}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}}{V_{max}}\left(V+V_{max}\right)$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}\left(1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}\right)$$

Soit $P[n] = P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^n + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}\left(1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^n\right)$

$$= P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^n - P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^n \cdot \frac{V_{min}}{V_{max}} + \frac{P_0 V_{min}}{V_{max}}$$

$$= P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^n\left(1-\frac{V_{min}}{V_{max}}\right) + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

AN : $P[100] = 10^5\left(\frac{10^{-2}}{10^{-2}+10^{-5}}\right)^{100}(1-0{,}1) + 10^5 \cdot 0{,}1$

$$P[100] = 9.10^4 \left(\frac{10^{-2}}{10^{-2}+10^{-5}}\right)^{100} + 10^4$$

$$= 9{,}1439 \,.\, 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0{,}914 \,.\, 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s.}$$

Avec l'expression solution de l'équation différentielle on a :

$$P(t) = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0\left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t/\tau}$$

$$\text{Soit } P(100\tau) = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0\left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{100 V_{max}}{V+V_{max}}}$$

$$\text{AN : } P(100\tau) = 0{,}1 \,.\, 10^5 + 10^5 (0{,}9) e^{-\frac{100 \,.\, 10^{-5}}{10^{-2}+10^{-5}}}$$

$$= 9{,}143 \,.\, 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0{,}914 \,.\, 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s}$$

écart relatif : $\frac{(9{,}1443 - 9{,}1439)}{9{,}1443} \times 100 = 4.10^{-3} \%$

$\Rightarrow$ très bonne corrélation entre le modèle continu et le modèle discret.

b) Il faut résoudre l'équation :

$$P_0 \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{100} \left(1-\frac{V_{min}}{V_{max}}\right) + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

$$= \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0\left(1-\frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t_0/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{100} = e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t_0/\tau}$$

$$\Leftrightarrow 100 \ln\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right) = -\frac{V_{max}}{V+V_{max}} \cdot \frac{t_0}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_0}{\tau} = 100 \ln\left(\frac{V+V_{max}}{V}\right)\left(1+\frac{V}{V_{max}}\right)$$

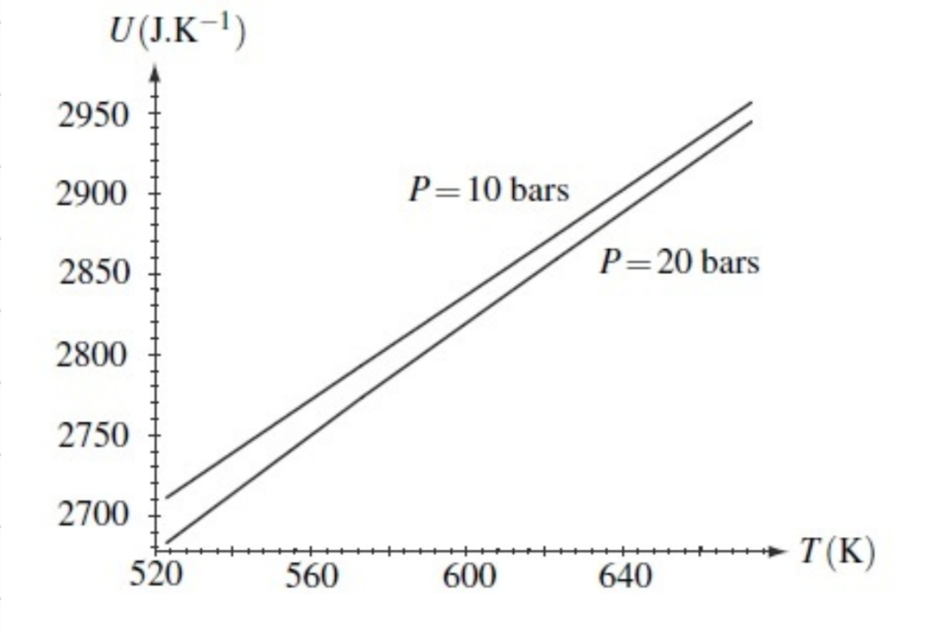
AN : $\frac{t_0}{\tau} = 100 \ln\left(\frac{10^{-2}+10^{-5}}{10^{-2}}\right)\left(1+\frac{10^{-2}}{10^{-5}}\right)$

$\frac{t_0}{\tau} = 100{,}05$

$\Rightarrow$ cohérent avec ce qui précède.

Exercice 6 :

Q1.



Q2. On obtient 2 droites pour $U = f(T)$ pour ces 2 pressions, cela prouve donc que l'énergie interne de ce gaz dépend de la pression.
$\Rightarrow$ Ce n'est pas un gaz parfait, il faut tenir compte des interactions.

Q3. Capacité thermique à volume constant

$$C_v = \left.\frac{dU}{dT}\right|_V \Rightarrow \text{pente des droites.}$$

On obtient $C_v = 28\ J.mol^{-1}$ à $P = 10\,bars$

$C_v = 29\ J.mol^{-1}$ à $P = 20\,bars$

Pour un GP on a $C_v = \frac{3}{2}R = 12{,}5\ J.mol^{-1}$

Ici la pente est donc plus élevée du fait des vibrations et des rotations.