Correction du TD TH2

Exercice 5 :

Q1. Pour un GP diatomique $C_{vm} = \frac{5}{2}R$

$$C_v = n\frac{5R}{2} = \frac{PV}{RT}\frac{5}{2}R = \frac{5PV}{2T}$$

AN : $C_v = \frac{5.10^5 . 9 . 2,5}{2 . 293} = \underline{1,9.10^4 J.K^{-1}}$

Q2. R et λ sont reliés par $R = \frac{e}{\lambda_b . S_m}$
avec S_m = surface des murs

$$\boxed{e = R . \lambda_b . S_m}$$

AN : $e = 2.10^{-2} . 0,8 . (2,5 . 3) \times 4 = 0,48 m = \underline{48 cm}$

Q3. On applique le 1er principe au système {local + mur} sur une durée infinitésimale dt :

$$dU = CdT = -P_{th}\,dt + P dt$$

$$\Leftrightarrow \quad C\,dT = -\frac{1}{R}\left(T(t) - T_0\right)dt + P\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad C\,dT + \frac{T(t)}{R}dt = \frac{T_0}{R}\,dt + P\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{RC} = \frac{T_0}{RC} + \frac{P}{C}}$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1

* Solution particulière : $T_p(t) = T_0 + RP$
* Solution générale de l'E.H : $T_H(t) = A e^{-t/\tau}$

avec $\tau = RC$

$\Rightarrow$ Solution complète :

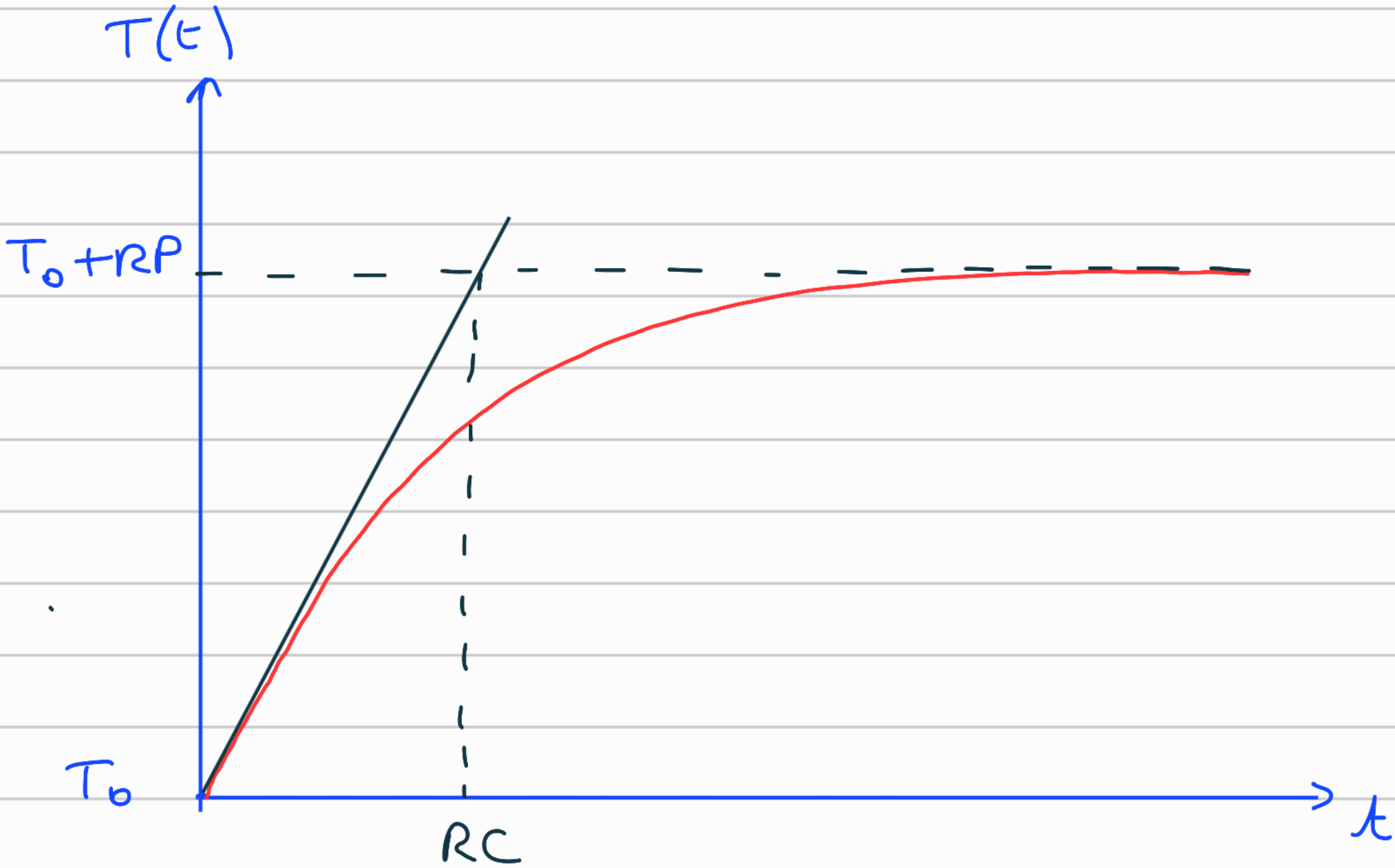
$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_0 + RP$$

Conditions initiales $T(0) = T_0$

$$T_0 = A e^{-t/\tau} + T_0 + RP$$

$$\Rightarrow \quad A = -RP$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(t) = RP\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + T_0} \quad \text{avec } \tau = RC$$



Q4. D'après la résolution précédente

$$T_A = T_0 + RP \Rightarrow \boxed{P = \frac{T_A - T_0}{R}}$$

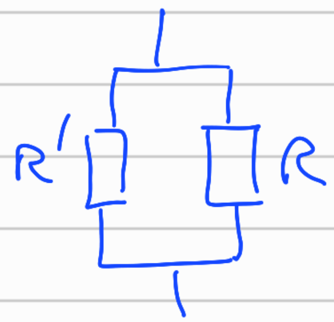
AN : $P = \frac{292 - 280}{2,00.10^{-2}} = \underline{600\ W}$

Rq : on peut aussi raisonner en écrivant l'égalité des pertes et du transfert thermique fourni par le radiateur : $P = P_{th}$

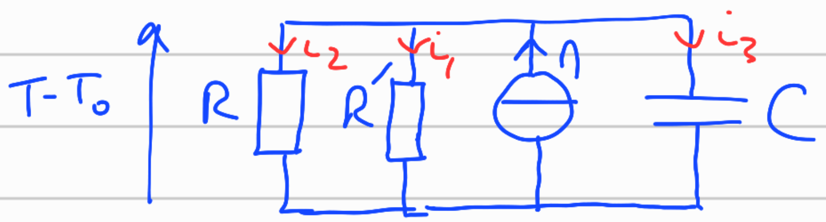
Q5. La présence d'une fenêtre modifie la résistance thermique de l'ensemble. En notant R' la résistance thermique de la fenêtre on a

R et R' en parallèle (le transfert thermique passe soit par la fenêtre, soit par les murs).

Le schéma électrique équivalent à l'association de 2 résistances thermiques en parallèle serait :



Rq (hors prog.) : on peut pousser plus loin l'analogie en faisant un équivalent électrique de l'ensemble :



On a l'équation électrique :

$$\eta = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{T-T_0}{R} + \frac{T-T_0}{R'} + C\frac{d(T-T_0)}{dt}$$

$$\frac{\eta}{C} = \frac{T}{RC} + \frac{T}{R'C} - \frac{T_0}{RC} - \frac{T_0}{R'C} + \frac{dT}{dt} - \underbrace{\frac{dT_0}{dt}}_{=0}$$

$$\frac{dT}{dt} + \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{C}\,T = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{C}T_0 + \frac{\eta}{C}$$

En posant $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ et $\eta = P$ on une équation analogue : $\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{R'C} = \frac{T_0}{RC} + \frac{P}{C}$

Exercice 6 :

Q1. On applique le 1er principe au système {conducteur ohmique} :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

* Le transfert thermique élémentaire reçu par le système au contact de l'atmosphère est $\delta Q = a(T_0 - T)\,dt$
* Le courant électrique fournit le travail élémentaire : $\delta W = RI^2\,dt$
* Pour le conducteur ohmique de capacité thermique C : $dU = C\,dT$

$$\Rightarrow \quad C\,dT = a(T_0 - T)\,dt + RI^2\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{T} + \frac{a}{C}T = \frac{a}{C}T_0 + \frac{RI^2}{C}}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec la constante de temps $\tau = \frac{C}{a}$

Q2. Pour $t \to +\infty$ la température tend vers $T_{lim} = T_0 + \frac{RI^2}{a}$

Soit $T_1 = T_0 + \frac{RI^2}{a}$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{RI^2}{T_1 - T_0}}$$

AN : $a = \frac{10^3 . 0{,}1^2}{313-293} = \underline{0{,}5 \ W.K^{-1}}$

Exercice 7 :

Q1.

* la transformation est très lente, donc il y a équilibre à chaque instant. On a donc $\delta W = -PdV$

* le gaz est parfait donc $dU = nC_{V,m}dT$

* les parois sont athermanes donc $\delta Q = 0$.

Le premier principe appliqué au gaz contenu dans l'enceinte donne :
$dU = \delta W = -PdV$

* le gaz étant parfait $PV = nRT$

donc $V = nR\dfrac{T}{P} \Rightarrow \ln V = \ln\left(nR\dfrac{T}{P}\right)$

soit $\ln V = \ln(nR) + \ln T - \ln P$

On fait une différentielle logarithmique

$$d(\ln V) = \frac{dV}{V} = \underbrace{\frac{d(nR)}{nR}}_{=0 \text{ car constante}} + \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \Rightarrow dV = \frac{V}{T}dT - \frac{V}{P}dP$$

On a donc $nC_{Vm}\,dT = -\dfrac{PV}{T}dT + \dfrac{PV}{P}dP$

$\Rightarrow nC_{Vm}\,dT = -nR\,dT + V\,dP$

or $V = \dfrac{nRT}{P} \Rightarrow nC_{Vm}\,dT = -nR\,dT + nRT\dfrac{dP}{P}$

$$\Rightarrow C_{Vm}\frac{dT}{T} + R\frac{dT}{T} = R\frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow (C_{Vm} + R)\frac{dT}{T} = R\frac{dP}{P}$$

Or $C_{Pm} - C_{Vm} = R \Rightarrow C_{Vm} + R = C_{Pm} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma R}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = R\frac{dP}{P}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma\frac{dT}{T} = (\gamma-1)\frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma\frac{dT}{T} + (1-\gamma)\frac{dP}{P} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\ln T^{\gamma}\right) + d\left(\ln P^{1-\gamma}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\ln\left(T^{\gamma}.P^{1-\gamma}\right)\right) = 0$$

En intégrant : $\boxed{T^{\gamma}P^{1-\gamma} = cte}$

Q2. On applique la relation précédente :

$$\boxed{T_0^{\gamma}P_0^{1-\gamma} = T_1^{\gamma}P_1^{1-\gamma}}$$

or $\quad PV = nRT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{nR}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{PV}{nR}\right)^{\gamma} P^{1-\gamma} = cte$$

$\Leftrightarrow \quad PV^{\gamma} = cte$

donc $\boxed{P_0 V_0^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}}$

De même on exprime la relation en fonction des variables T et V en éliminant P :

$P = \frac{nRT}{V} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{nRT}{V}\right) V^{\gamma} = cte$

$\Rightarrow \quad TV^{\gamma-1} = cte$

$\boxed{T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}}$

<u>Remarque</u> : ces 3 relations $\begin{cases} PV^{\gamma} = cte \\ TV^{\gamma-1} = cte \\ T^{\gamma} P^{1-\gamma} = cte \end{cases}$

sont appelées lois de Laplace, elles s'appliquent aux transformations adiabatiques et lentes des gaz parfaits sur une plage de températures où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ est constant.

Q3. $\delta W = -PdV$ or $PV^{\gamma} = cte = P_0 V_0^{\gamma}$

donc $P = \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}$

$$\Rightarrow \delta W = -P_0 V_0^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}} = -P_0 V_0^{\gamma} \, d\left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$W = \int_{\text{état}0}^{\text{état}1} -P_0 V_0^{\gamma} \, d\left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$W = -\frac{P_0 V_0^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right) \quad \text{or } P_0 V_0^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

$$W = \frac{P_1 V_1^{\gamma} . V_1^{1-\gamma} - P_0 V_0^{\gamma} . V_0^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}}$$

Q4. D'après le 1er principe on a :

$\Delta U = W + Q \Rightarrow W = \Delta U$ car la transformation est adiabatique.

avec $\Delta U = n C_{vm} (T_1 - T_0) = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$

Soit $W = \dfrac{nRT_1 - nRT_0}{\gamma - 1}$

or $P_1 V_1 = nRT_1$ et $P_0 V_0 = nRT_0$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}}$$

Exercice 8 :

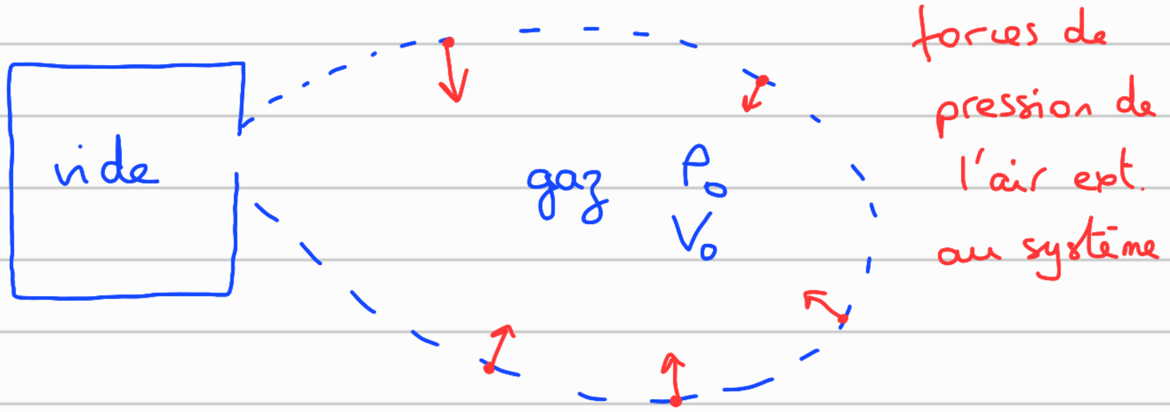
Les transferts thermiques sont assez longs par rapport à la durée de la transformation, on peut la considérer adiabatique.

On considère le système fermé composé du gaz qui sera contenu dans l'enceinte à la fin de la transformation.

Le 1er principe appliqué au système entre l'ouverture du petit trou et le moment où la pression dans l'enceinte est égale à la pression atmosphérique donne :

$\Delta U = W + Q = W$ car la transformation est adiabatique.

état initial



état final

$\delta W = -P_0 \, dV \Rightarrow W = -P_0 \Delta V$

avec $\Delta V = 0 - V_0$

On ne considère que le volume à l'extérieur de l'enceinte car c'est là que s'appliquent les forces de pression.

$$\Rightarrow \Delta U = P_0 V_0 = \frac{nR}{\gamma-1}\left(T_1 - T_0\right)$$

or $P_0 V_0 = nRT_0$

$$\Rightarrow \quad nRT_0\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) = \frac{nRT_1}{\gamma-1}$$

$$\boxed{T_1 = \gamma T_0}$$